

# 进化超多目标优化研究进展及展望

肖人彬<sup>1,2†</sup>, 李贵<sup>1,2</sup>, 陈峙臻<sup>3</sup>

(1. 华中科技大学 人工智能与自动化学院, 武汉 430074; 2. 华中科技大学 人工智能研究院, 武汉 430074;  
3. 格林威治大学 商学院, 英国 伦敦 SE10 9LS)

**摘要:** 近些年来, 超多目标优化逐渐成为多目标优化研究的热点之一; 由于超多目标优化问题具有难以寻优的高维目标空间, 其研究颇有挑战性, 因而受到广泛关注。现有综述性文献通常只是针对某个特定方面, 缺乏系统性考察。有鉴于此, 本文首先从问题定义出发, 综合考虑超多目标优化问题范畴, 进行超多目标优化问题的概念辨析。其次, 通过对近些年的相关文献整理, 系统分析超多目标优化问题进展并对其中部分经典方法加以介绍。通过对基准测试函数和性能指标的说明, 围绕超多目标优化研究方法展开综合性论述。进而选取5个典型的超多目标进化算法, 在2组基准测试函数和4个实际问题分别展开仿真实验, 通过性能指标和非参数检验对不同类别的算法进行理论上的分析。最后, 在明确超多目标优化研究领域的若干前沿问题的基础上, 对今后的研究工作进行展望。

**关键词:** 超多目标优化; 高维多目标; 超多目标应用; 进化算法; 性能指标

**中图分类号:** TP18 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2022.2167

**引用格式:** 肖人彬, 李贵, 陈峙臻. 进化超多目标优化研究进展及展望. 控制与决策.

## Research progress and prospect of evolutionary many-objective optimization

XIAO Ren-bin<sup>1,2†</sup>, LI Gui<sup>1,2</sup>, CHEN Zhi-zhen<sup>3</sup>

(1. School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. Institute of Artificial Intelligence, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 3. Business School, University of Greenwich, London, SE10 9LS, UK)

**Abstract:** In recent years, many-objective optimization has gradually become one of the research hotspots of multi-objective optimization. Due to the high-dimensional objective space is difficult to optimize, the research on many-objective optimization problems (MaOPs) is quite challenging and has received extensive attention. The existing surveys usually only focuses on a specific aspect and lacks systematic investigation. Therefore, this paper firstly starts from the problem definition, considers the category of MaOPs, and makes the concept analysis of MaOPs. Secondly, the progress of MaOPs is systematically analyzed and some classical methods are introduced by collating the relevant works in recent years. Through the explanation of benchmark functions and performance indicators, the research method of many-objective optimization is comprehensively discussed. Then, five typical many-objective evolutionary algorithms (MaOEAs) are selected. The simulation experiments are carried out on two groups of benchmark functions and four practical problems. The different algorithms are analyzed theoretically by performance indicators and nonparametric tests. Finally, the future research work is prospected based on identifying some frontier problems in many-objective optimization.

**Keywords:** many-objective optimization; high-dimension multi-objective; many-objective application; evolutionary algorithm; performance indicator

## 0 引言

近些年来, 一类需要同时优化多个冲突目标的多目标优化问题得到学者们的广泛关注。随着研究展开, 又逐渐地转向了对更加复杂的超多目标

优化问题的研究, 部分学者也对相关工作进行了一些整理和分析。最早在2008年, Ishibuchi等<sup>[1]</sup>就超多目标优化的工作进行整理。通过实验论证了超多目标优化问题由高维目标可伸缩性带来的困

收稿日期: 2022-12-16; 录用日期: 2023-04-06.

基金项目: 科技创新2023—“新一代人工智能”重大项目(2018AAA0101200), 国家自然科学基金项目(52275249).

†通讯作者. E-mail: rbxiao@hust.edu.cn.

难,并介绍了一些在目标可伸缩性上的改进算法。Li等<sup>[2]</sup>对比8种具有代表性意义的算法,通过多种指标在几组连续和组合优化问题上进行综合分析。田野等<sup>[3]</sup>对超多目标优化相关工作展开分析,介绍超多目标优化的背景和意义,并对算法进行分类,同时采用实验的方式在测试函数集对几类方法进行性能比较和分析。刘建昌等<sup>[4]</sup>针对高维问题选择压力衰减方面进行论述,并分析各种算法的优缺点。除一般超多目标优化问题外,还有工作<sup>[5]</sup>从真实问题中的多模态角度出发,展开多模态多目标优化问题综述,给出问题背景定义以及问题难点,同时介绍相关算法。刘若辰等<sup>[6]</sup>从动态问题角度出发,叙述一类目标函数、约束和参数等随时间发生变化的动态多目标优化问题的理论背景、发展概况和应用。Afshari等<sup>[7]</sup>结合实际应用环境,对实际应用中的约束多目标优化问题展开综述,给出问题和约束的定义,并对相关算法进行比较。

上述研究对当时背景下的阶段性工作展开整理和分析,对超多目标优化领域的发展起到一定促进作用。通过阅读综述,读者能够快速了解相关研究领域的基础知识和前沿内容。但这些工作通常只针对某一固定方向,没有考虑整个超多目标优化领域。对大规模、多模态等优化问题,当涉及超过3维的目标空间时也属于超多目标优化的范畴,同样需要考虑高维目标空间的处理技术。从问题角度出发,在具有高维目标空间的一般超多目标优化问题基础上,有些问题还拥有大规模、多模态、动态、约束等特点。例如大规模超多目标优化问题,不仅需要处理高维目标空间中解集收敛性和多样性平衡问题,还需要考虑高维决策空间中解的有效搜索问题。从算法角度出发,还有基于偏好或者代理模型等策略的算法用以应对不同的问题,需要进行更详细的整理和综合分析。随时间发展,又有很多优秀的工作和亟待解决的问题难点被提出。因此,本文将从这些角度出发,继续在前人工作的基础上,综合整理超多目标优化领域当前研究进展,并进一步提炼出前沿问题和研究展望。

## 1 超多目标优化问题概念辨析

本节将从优化问题的背景展开,叙述现实世界优化问题的求解难点,进而引出多目标和超多目标优化问题的概念,分析超多目标优化问题的难以保持收敛性和多样性的原因。最后,对一般超多目标优化问题和其他超多目标优化问题的定义和特点展开详细分析。

### 1.1 超多目标优化问题背景

现实世界中的优化问题常呈现出非凸、多模态、大规模、高约束、多目标及大量的不确定性的特点。在问题建模时需要考虑这些因素才能够进行更好的仿真,以便于更精准的求解实际问题。

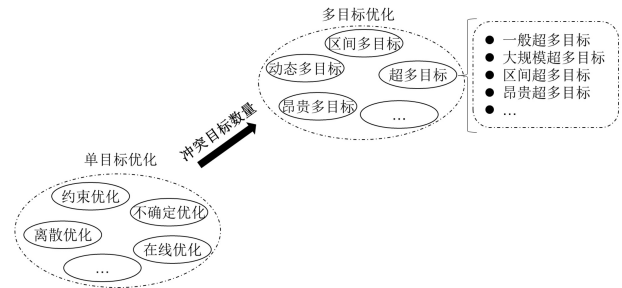


图1 优化问题划分

随研究不断推进,当前优化领域的研究方向也逐步由单目标优化转向了多目标优化。如图1所示,传统的单目标优化研究的重点是处理局部最优、不确定性、约束以及离散解等因素。在当前研究背景下这些因素已能够得到较好的解决,常见方法有进化算法、单纯形法、群体智能等<sup>[8,9]</sup>。就真实问题而言,很多问题会涉及多个相互冲突且需同时优化目标函数,因此这类问题则无法通过传统的单目标优化算法实现对所有目标的寻优。多目标优化问题的解不是单一的最优解,而是一组Pareto解集。通过有限数量的解集在Pareto前沿上模拟出收敛性良好且均匀分布的解是求解多目标优化问题的主要目标,图2给出了多目标优化问题的求解过程。通常得到这组解集后,会通过专业领域内的专家根据先验知识或偏好选取其中一部分解。

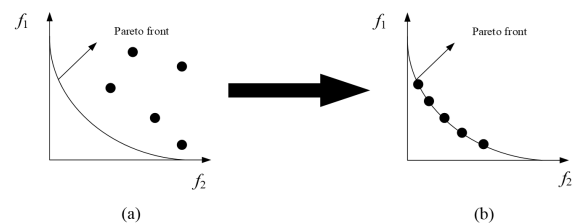


图2 多目标优化问题求解方向

多目标优化的研究内容中不仅存在传统单目标中局部最优、离散等难点,还需要考虑多个相互冲突的优化目标。多目标优化问题的一个重要分支是超多目标优化问题(具有高于3维的目标空间,又称高维多目标优化问题),这也带来新的困难。在2维和3维的目标空间可以实现直观的可视化,给问题的求解带来便利性,可解释性强。而当目标数量超过3个,便无法在可视化空间中给出直观解释。常用

于解决多目标优化问题的方案往往在超多目标优化问题上不能表现出良好的性能。例如基于非支配排序的算法, 当目标数增加时, 解集中的非支配解的数量也随之呈指数增长。当目标个数达到一定数量后, 几乎所有解都是非支配解, 导致这种算法在选择压力上的失效。因此, 求解超多目标优化问题还需进一步考虑高维目标空间中的有效策略。

## 1.2 一般超多目标优化问题

多目标优化问题的求解目标是得到一组在收敛性和多样性上保持均衡的非支配解集。现有算法在解决多目标优化问题上已经小有建树。部分算法能够在一些经典测试函数集<sup>[10-12]</sup>的低维实例上得到一组平衡收敛性和多样性的解集。为方便叙述, 这里给出一般多目标优化问题的数学表达式:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)\} \\ & \text{subject to } x \in X \subseteq R^M \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $F(x)$ 为目标向量,  $M$ 表示目标数量,  $X$ 表示决策空间。求解超多目标优化问题依然需要得到一个良好平衡收敛性和多样性的最优解集, 但因高维目标空间严重的目标冲突更难处理。在多目标和超多目标优化中, 存在如下定义:

**定义1** Pareto支配<sup>[1]</sup>: 对一个最小化问题, 取决策空间 $X$ 中的两个解向量 $x_1$ 和 $x_2$ , 当且仅当 $f_i(x_1) \leq f_i(x_2)$ 对每个 $i = 1, 2, \dots, M$ 都成立, 同时满足 $f_j(x_1) < f_j(x_2)$ 对至少一个 $j = 1, 2, \dots, M$ 成立。称为 $f(x_1)$ Pareto支配 $f(x_2)$ , 符号表示为 $F(x_1) \succ F(x_2)$ 。

**定义2** Pareto集<sup>[1]</sup>: 当且仅当不存在 $x \in X$ 满足 $F(x) \succ F(x^*)$ , 称 $x^* \in X$ 为Pareto最优点, 所有Pareto最优点的集合称为Pareto集 (Pareto set, PS)。

**定义3** Pareto前沿<sup>[1]</sup>: 对PS中所有的Pareto最优点 $x^*$ , 称 $F(x^*)$ 为Pareto最优解, 所有Pareto最优解的集合为Pareto前沿(Pareto front, PF)。

多目标优化算法中常采用非支配排序和精英策略来促进解收敛到Pareto前沿上, 如NAGA-II<sup>[13]</sup>和SPEA2<sup>[14]</sup>等。非支配排序过程以Pareto支配关系为基础, 将所有候选解进行分层处理再逐层进行选择。但超多目标优化问题拥有超过3维的目标空间, 导致非支配解的比例随目标数量呈指数增长<sup>[15]</sup>。这种特点使算法对收敛性的选择压力降低, 对收敛速度和精度带来较大影响。有研究<sup>[11,16]</sup>表明, 当目标数量大于12时, 非支配解的比例几乎达到100%。因此, 有工作<sup>[17]</sup>通过低维问题中的策略

推导高维目标空间计算公式用于求解超多目标优化问题。此外, 不同问题Pareto前沿的形状和密度也有较大差异, 对平衡收敛性和多样性带来很大挑战, 这些内容将在第2节中重点介绍。

## 1.3 其他超多目标优化问题

除一般超多目标优化问题外, 在多目标优化领域还存在一些其他类型的问题, 如大规模多目标优化、约束多目标优化、区间多目标优化、昂贵多目标优化等。当这些问题的目标数量大于3时, 同样也是超多目标优化问题。此类问题除了要考虑高维目标空间中收敛性与多样性的平衡, 还需对特殊难点进行处理, 下面进行详细介绍。

### 1.3.1 大规模超多目标优化问题

一般将决策变量维度大于100的多目标优化问题称为大规模多目标优化问题<sup>[18]</sup>, 而当目标数量超过3时称为大规模超多目标优化问题。大规模超多目标优化问题在数学形式上与公式(1)保持一致, 区别在于决策变量维度的大小。这类问题的难点在于如何在高维决策空间中进行有效的搜索。随着决策变量数量的增加, 算法由于不能很好的搜索决策空间而导致性能下降。例如, 通过交叉和突变算子对解突变时, 由于决策变量的维数较大, 交叉和突变后产生好解的概率也会降低。

目前, 一些学者展开了对大规模多目标和超多目标优化问题的研究, 这方面工作大多对决策变量进行特殊处理。最近的一项研究提到, 当前对高维决策空间的处理方法主要分为以下三类<sup>[19]</sup>:

(1) 基于决策变量分组 (decision variable grouping), 包括随机分组 (随机<sup>[20,21]</sup>和动态随机<sup>[22]</sup>分组)、差分分组<sup>[23,24]</sup>和变量分析 (控制变量分析<sup>[25]</sup>、变量聚类<sup>[26]</sup>和鲁棒性导向的变量划分<sup>[27,28]</sup>);

(2) 基于决策空间降维 (decision space reduction), 包括问题转化 (问题转化<sup>[29]</sup>、问题重构<sup>[30]</sup>和线性组合<sup>[31]</sup>) 和降维 (随机嵌入<sup>[32]</sup>、主成分分析<sup>[33]</sup>和无监督神经网络<sup>[34]</sup>);

(3) 特定的新搜索策略 (novel search strategy), 包括新算子 (均匀交叉<sup>[35]</sup>、信息反馈模型<sup>[36,37]</sup>等) 和概率模型 (高斯过程<sup>[38]</sup>、协方差矩阵自适应进化策略<sup>[39]</sup>和生成对抗网络<sup>[40]</sup>等)。

### 1.3.2 约束超多目标优化问题

各类约束条件在真实优化问题中普遍存在, 不同约束条件的限制对算法求解过程带来不同的挑战。约束通常包含且不限于决策空间上下限、等

式和不等式约束等, 约束条件直接导致可行域范围变窄。在无约束时表现较好的解可能因不满足约束而淘汰, 不可行解的修正也需要额外消耗评估资源<sup>[41]</sup>。因此, 处理约束超多目标优化问题需要使用较好的约束处理策略以保证解的有效性。通常来说, 约束超多目标优化问题可通过下式来表示<sup>[42]</sup>:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)\} \\ & \text{subject to } g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ & \quad \quad \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $F(x)$ 为目标向量,  $g_i(x)$ 表示第 $i$ 个不等式约束,  $h_j(x)$ 表示第 $j$ 个等式约束,  $p$ 和 $q$ 分别表示不等式约束和等式约束的数量。通常处理不等式约束极为困难, 一般取一个极小值 $\sigma > 0$ 将不等式约束转化为等式约束, 如下式所示<sup>[42]</sup>。

$$h_j(x)' \equiv \sigma - |h_j(x)| \geq 0 \quad (3)$$

在约束超多目标优化中, Pareto支配的概念与无约束问题基本一致, 区别在决策空间 $X$ 中的取值仅限于满足约束的部分决策向量。另外, 除不等式约束向等式约束的转化外, 常见的约束处理方法以罚函数为主, 即建立合适的惩罚函数, 对不满足约束的解给予一定惩罚, 使其适应度值增大, 在选择时不作为好个体被选中。例如基于分解的算法中基于惩罚的边界交叉法, 也使用了罚函数的思想。但罚函数处理约束存在着缺陷, 会使这些算法陷入两种停滞状态<sup>[43]</sup>:

- (1) 多目标优化问题的可行域可能由多个不相连的可行子域组成, 搜索容易陷入不包含所有全局Pareto最优解的可行子区域;
- (2) 一个整体约束违逆函数可能有许多非零最小点, 这会使搜索陷入不可行域。

为解决这两个问题, 该工作<sup>[43]</sup>提出一种检测逃逸策略检测搜索是否陷入这两个停滞状态, 然后逃离。并采用可行比和整体约束违反变化率来检测停滞状态, 调整约束违反的权重来引导搜索脱离停滞状态。总体来看, 由于约束的限制, 在演化时保留可行解与平衡收敛性和多样性之间可能存在较大的冲突。部分偏好于收敛性和多样性的解因不满足约束而无法保留至下一代, 造成解集在收敛性和多样性的缺失。为了保持在约束条件下的收敛性和多样性的平衡, 在可行域和不可行域的同时搜索是一项有意义的工作。除罚函数法外, 约束处理技术还包括特殊表示与操作、修复法、可行性驱动、约束和目标分离法、集成的约束处理方法等<sup>[44]</sup>。

### 1.3.3 区间超多目标优化问题

上述优化问题的定义中, 目标函数是确定的。但真实系统的模型往往在不了解的情况下模拟出来, 这种情况下目标值具有高度不确定性, 样本分布未知。这种不确定性为区间表示的多目标优化时, 称为区间多目标优化问题, 通常具有随机、模糊、区间等特点<sup>[45]</sup>。当问题的目标数量大于3时称为区间超多目标优化问题<sup>[46]</sup>, 数学表示如下:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } F(x) = \{f_1(x, c_1) \dots f_M(x, c_M)\} \\ & \text{subject to } x \in X \end{aligned} \quad (4)$$

$$c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})^T, c_{ik} = [c_{ik}, \bar{c}_{ik}], k = 1 \dots n$$

其中,  $c_i$ 是独立于决策变量 $x$ 的区间向量参数,  $c_{ik}$ 是 $c_i$ 的第 $k$ 个元素。对于 $X$ 中的任意两个解 $x_1$ 和 $x_2$ , 第 $i$ 个目标函数分别表示为 $f_i(x_1, c_i)$ 和 $f_i(x_2, c_i)$ 。Limbourg等<sup>[47]</sup>对两个区间偏序关系定义如下:

**定义4** 偏序关系 $>_{IN}$ <sup>[47]</sup>: 对两个区间 $y$ 和 $y'$ , 偏序关系 $y >_{IN} y'$ 的定义为:

$$y >_{IN} y' \Leftrightarrow \underline{y} \geq \underline{y'} \wedge \bar{y} \geq \bar{y'} \wedge y \neq y' \quad (5)$$

**定义5** 非精确Pareto关系 $>_{IP}$ <sup>[47]</sup>: 在多个目标维度中, 由Pareto支配关系拓展出的非精确Pareto关系 $y >_{IP} y'$ , 满足下式:

$$y >_{IP} y' \Leftrightarrow \begin{aligned} & \forall i \in 1, \dots, n : y_i >_{IN} y'_i \vee y_i \| y'_i \\ & \exists i \in 1, \dots, n : y_i >_{IN} y'_i \end{aligned} \quad (6)$$

**定义6** 区间优化下的超体积<sup>[47]</sup>: 为模拟区间多目标优化问题的Pareto最优解, 超体积的定义如下: 其中,  $x_{ref}$ 表示参考点,  $\wedge$ 表示Lebesgue测度,  $H(X)$ 为最好和最坏情况的区间范围。

$$\begin{aligned} H(X) &= [\underline{H}(X), \overline{H}(X)] \\ &= \wedge \left( \bigcup_{x \in X} \{y \in R^n \mid x_{ref} <_{IP} y <_{IP} x\} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{mid } H(X) = \frac{H(X) + \overline{H}(X)}{2} \quad (8)$$

其中,  $x_{ref}$ 表示参考点,  $\wedge$ 表示Lebesgue测度,  $H(X)$ 为最好和最坏情况的区间范围。

**定义7** 由最终解集 $X$ 得到的超体积之和<sup>[45]</sup>: 为模拟区间多目标优化问题的Pareto最优解, 超体积之和的定义如下:

$$I(X) = \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^m (\bar{f}_i(x, c_i) - \underline{f}_i(x, c_i)) \quad (9)$$

对一个Pareto最优解集, 使得 $I(X)$ 越小表示解集的不确定性越小, 这些定义通常应用于区间多目标和区间超多目标优化算法对解集进行评价。区间超多目标优化问题除传统意义上在高维目标上平衡收敛

性与多样性这一目标外, 还增加不确定性区间问题的处理, 因此更具复杂的求解难度。

### 1.3.4 多模态超多目标优化问题

多模态优化问题广泛的存在现实应用中, 是指具有多个最优解并对应多个决策变量的一类问题。当其拓展到多目标优化时即为多模态多目标优化问题, 这类问题的Pareto前沿对应多个Pareto集。多模态多目标优化问题的不仅要搜索到在Pareto前沿上均匀分布的解集, 同时还需要找到所有的Pareto集<sup>[48]</sup>。潜在优势是能够为决策者提供更多的候选解供选择, 在实际应用中可以提高对解选择的灵活性。

图3给出2目标多模态多目标优化问题目标空间与决策空间对应关系。假设目标空间给出Pareto前沿上的5个解。以a和b为例, a对应决策空间中的 $x_{a1}$ 和 $x_{a2}$ , b对应决策空间中的 $x_{b1}$ 、 $x_{b2}$ 和 $x_{b3}$ 。如果决策者针对目标空间的a和b展开对解的选择时, 应给出a和b对应的所有解向量为最佳。从决策空间可以看出,  $x_{a1}$ 和 $x_{a2}$ 在 $x_1$ 和 $x_2$ 这2个维度上的侧重不同,  $x_{b1}$ 、 $x_{b2}$ 和 $x_{b3}$ 也具有相似的特点。在这种背景下, 决策者能够更好的根据自己的偏好选择解向量。在实际问题中, 多模态的情况可能更为复杂, 因此对这类问题的研究能够更好的兼顾到所有解。

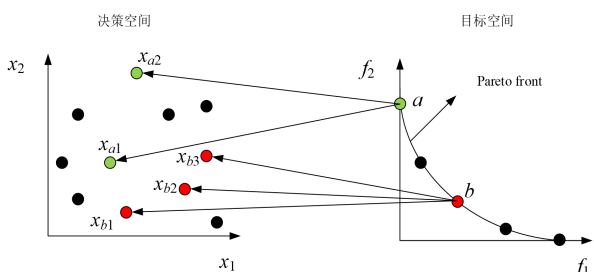


图3 多模态多目标优化问题目标空间与决策空间关系

与其他超多目标优化问题相似, 当这类问题的目标数大于3时, 问题转变为多模态超多目标优化问题, 在高维目标空间均衡收敛性和多样性的困难也随之浮现。求解这类问题常用到小生境技术, 如适应度共享和拥挤度等, 与超多目标优化技术的有效结合是解决这类问题的前景方法之一。当前部分工作在多模态超多目标优化中有了一定的建树, 例如MM-NAEMO<sup>[48]</sup>和NIMMO<sup>[49]</sup>等。

### 1.3.5 昂贵超多目标优化问题

对真实优化问题, 往往通过有效建模构造出目标函数进行仿真。进化算法也正是因其优化速度快和精度高而被广泛使用。处理优化问题的常规方法首先是根据问题特性选择合适的算法, 然后再根据

约束等设计特殊的问题处理策略, 正如图4右侧所示。但这种方式存在着一个隐含的假设, 即函数评估是非常廉价的, 通常表现为通过简单的仿真函数计算就可以得到目标值。但是很多优化过程的目标评估是非常昂贵的, 主要表现在金钱和时间上的高额消耗。例如, 在农用拖拉机进气通风系统设计<sup>[50]</sup>中, 为保持舱内温度的均匀和挡风玻璃的解冻, 需要设计多个进出风口的管道参数以保证合适的流量使温度均匀分布。该问题需要用到计算昂贵的CFD模拟和实时在线的函数评估, 使得算法必须在函数评估阶段阻塞。因此, 研究者们使用基于代理模型处理高代价的昂贵超多目标优化问题<sup>[51-53]</sup>。由于代理模型管理过程需要处理一些仿真数据, 所以又称为数据驱动的进化优化算法。

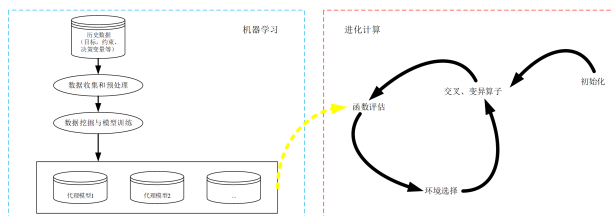


图4 数据驱动进化优化过程

如图4左侧所示, 处理昂贵多目标和超多目标优化问题, 常采用机器学习方式生成代理模型预测昂贵优化问题的最优解。这类算法首先将历史数据、决策变量、目标以及约束等进行预处理。然后对不同特点的数据, 采用数据挖掘或模型训练的方式生成代理模型。当前大多数机器学习模型都可用于生成代理模型, 例如多项式回归<sup>[54]</sup>, Kriging模型<sup>[55,56]</sup>, 神经网络<sup>[57-59]</sup>, 径向基函数神经网络<sup>[60-63]</sup>等。

## 2 超多目标优化研究现状分析

### 2.1 超多目标优化文献统计分析

本节从超多目标优化的研究现状的入手, 对现有研究进行总结, 对不同类别的策略进行综述。本节工作在Google Scholar和中国知网上统计从2000年1月到2022年10月期间发表的相关文献。其中英文文献以“many-objective optimization”进行检索, 中文文献以“超多目标优化”或“高维多目标优化”为检索条件, 并将检索结果中的有效文献进行归纳整理, 共计1060篇相关文献, 其中包含965篇英文文献和95篇中文文献, 下面对这些工作展开论述。

首先, 本文对1060篇相关文献的发表年份进行统计。如图5所示, 除2003年有一篇文献外, 2000年

到2004年之间并没有相关文献发表。而2005年至2021年是相关文献发表的爆发期，共有944篇相关文献在这期间发表，而2022年目前已有115篇相关文献发表。从论文数的增长上看，虽然增长率不成规律，但总体呈现上升趋势。这种增量在2011年有稍微下降的势头，但在2020年和2021年达到顶峰，分别有147和145篇相关文献在这两年发表的。从这些数据中可以看出，超多目标优化问题已经逐渐成为研究热点。超多目标优化算法不仅应该找到一条合适的进化方向，还需要在不连续的、缺失的和退化的等复杂Pareto前沿上具有保持多样性的能力。基于此，本节将在这些数据的基础上重点整理和分析超多目标优化算法的发展现状。

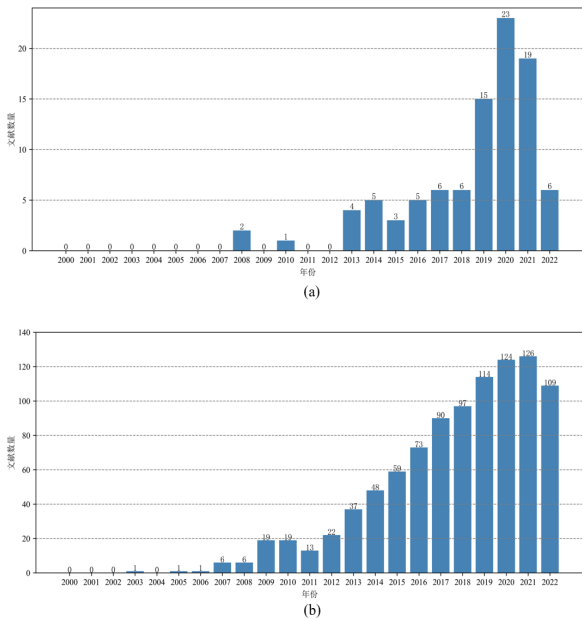


图5 超多目标优化文献各年份发表数量统计 (a) 中文文献统计; (b) 英文文献统计

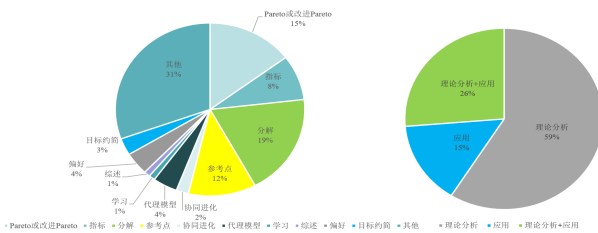


图6 中文文献分类及用途整理

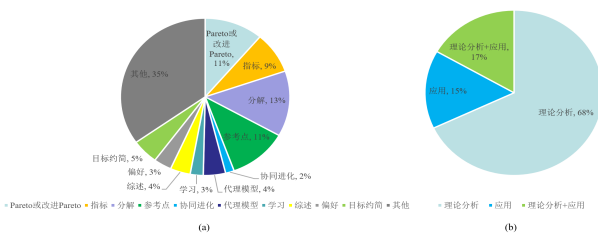


图7 英文文献分类及用途整理

除了对发表文献数量的统计，本节还对各种算

法的分类和用途进行统计，以饼状图的形式呈现在图6和图7中。本节主要列举和分析基于Pareto支配或改进Pareto支配、指标、分解、参考点、协同进化、代理模型、学习、偏好和目标约简这9种典型的策略，饼状图中的“综述”部分为相关文献综述。由于中文文献中没有基于参考点、偏好和目标约简的算法，因此未在图6中统计。此外，“其它”表示除上述9种算法的其它类型。最后，图6和图7的子图(b)分别给出相关文献的用途。其中，“理论分析”指文献中提出了一种新的算法、改进策略或新策略，然后在基准测试函数上进行算法的性能测试。“应用研究”是指将现有算法直接应用于实际应用模型以解决真实优化问题。“理论分析+应用”是指改进现有算法或针对性提出新算法，以处理真实优化问题。从2个饼状图也可以看出，大部分现有研究是在基准测试函数上验证算法性能。其中，理论分析在中文文献中占比接近60%，应用研究的文献比例比英文文献的稍多一些，分别占比41%和32%。由于中文文献数量相对较少，表1统计了英文文献中应用研究占当年发表文献总数的数据，2000年至2013年由于文献数量少被整合在一起。表中数据显示，随研究展开，应用研究呈现逐年增长的趋势，从2020年开始超过平均值32.02%。可以看出应用研究是超多目标优化领域发展的重要趋势，有助于理论性算法研究落地于实践。

表1 英文文献中各年份应用研究占比

年份	应用研究文献数	文献总数	占比
2000-2013	27	125	21.60%
2014	9	48	18.75%
2015	21	59	35.59%
2016	20	73	27.40%
2017	29	90	32.22%
2018	26	97	26.80%
2019	32	114	28.07%
2020	50	124	40.32%
2021	54	126	42.86%
2022	41	109	37.61%
合计	309	965	32.02%

由图6 (a) 可知，中文文献使用较多的还是传统的三类策略，分别是基于Pareto支配、指标和分解策略。这三者所占比重为42%，接近总文献数量的一半。而基于学习、代理模型和协同进化三种策略仅占到7%，只与基于指标的文献数量近似。图7 (a) 中英文文献相较于中文文献有些不同，三类传统策略所占比重明显下降，仅占到33%。基于学习、代理模型和协同进化三种策略所占比重增加到9%。同时，基于参考点、偏好和目标约简的算法明显增

多, 占比19%。出现这种情况的原因可能如下: 1、中文文献的应用研究更多, 部分研究可能更看重部分主要目标, 因此传统的三大策略相对有效。另外, 基于指标和分解的算法受目标数量影响较小, 尤其是基于分解的算法在Pareto前沿比较规则的问题上具有较好的性能。2、中英文文献中都进行了一定比例的应用研究, 真实问题的Pareto前沿往往未知且不规则, 所以需要其他的有效策略保证收敛性和多样性平衡。3、中文文献数量较少, 仅与2014年发表的英文文献数量相当, 因此也可能对结果分析带来影响。接下来, 将重点讨论使用较多的这9类策略, 分析每一类算法的特点。

## 2.2 超多目标优化的三类经典方法

基于Pareto支配的算法主要依赖非支配排序和多样性保持策略, 经典算法为NSGA-II<sup>[13]</sup>。但NSGA-II的缺点会随着目标数量的增加放大, 解集中非支配解的数量随着目标数量呈指数上升<sup>[15]</sup>。此时起主要作用的部分是多样性保持策略。因此, NSGA-II在处理超多目标优化问题时具有随着目标数量增多而性能下降的缺点。为解决这个问题, NSGA-III<sup>[64,65]</sup>采用参考点来增加选择压力和解集多样性。除这种增加参考点引导的方式外, 还有一些工作通过构建新指标或构造策略改进Pareto支配关系来提高算法在超多目标优化问题上的性能, 如 $\epsilon$ 支配<sup>[66,67]</sup>、模糊支配<sup>[68,69]</sup>、非支配区域收缩方法<sup>[70]</sup>和近似非支配排序方法<sup>[71]</sup>等。

基于指标的算法在进化搜索中基于一种预定义的指标, 理想状态下, 更好的指标值应伴随着解集收敛性和多样性上的提升。例如, HypE<sup>[72]</sup>采用超体积 (hypervolume, HV)<sup>[73,74]</sup>作为评价指标, 优化过程使整个解集保持更大的HV值。但精确的HV值计算非常耗时, 所以常采用蒙特卡罗模拟来近似精确的HV值, 以便于权衡估算的准确性和有限的计算资源。此外, IBEA<sup>[75]</sup>采用 $I_{\epsilon+}$ 指标促进收敛性提升。该指标描述的是最优解集中的解支配Pareto前沿上的解所需要平移的最小距离, 即让最优解集中的解到Pareto前沿所需的最小距离。IBEA通过 $I_{\epsilon+}$ 指标引导解集收敛到Pareto前沿上, 使解集保持良好的收敛性。近些年来, 基于指标的算法得到不错的发展并取得一定的成就。例如CEC 2018超多目标优化竞赛的冠军算法CVEA3<sup>[76]</sup>是基于互评价指标 (mutual evaluation, ME) 的超多目标优化算法。基于指标的算法受到目标数量影响较小, 优点在于收敛速度快。但是指标的设计往往又不能

很好的适配所有问题的特点, 尤其是真实问题具有较为复杂的Pareto前沿, 使基于指标的算法经常会收敛到Pareto前沿的某个或某几个子区域。目前, 用于描述解集收敛性或多样性特征的评价指标已有多种, 例如R2指标<sup>[77,78]</sup>和HV<sup>[73,74]</sup>等。3.2节将会详细介绍指标定义, 本节不再赘述。

基于分解的算法采用分解思想将一个多目标优化问题分解为多个标量子问题进行同时优化。原始算法MOEA/D<sup>[79]</sup>中采用权重和、切比雪夫以及基于惩罚的边界交叉法三种分解方法。三种分解方法在不同问题上的性能不同, 如权重和法在非凸问题不能很好的发挥作用<sup>[79]</sup>。这类算法的性能主要受分解方法的限制, 部分研究提出动态分解<sup>[80]</sup>、自适应权重等方法<sup>[81,82]</sup>用以解决相关劣势。Liu等<sup>[83]</sup>采用协同进化处理分解后的每个子问题, 每个子问题都拥有独立的解集和计算资源。同时, 还利用一种自适应区域调整策略的思想来平衡收敛性和多样性<sup>[83]</sup>。此外, 一些算法将MOEA/D与其它优化思想相结合。例如, 有工作<sup>[84]</sup>将MOEA/D与DE算子相结合来增加MOEA/D处理多目标优化问题的能力。有研究<sup>[85]</sup>通过MOEA/D与Pareto支配关系相结合以增强收敛性, 提高了基本MOEA/D的性能。此外, Tanabe等<sup>[86]</sup>采用无界外部存档 (unbounded external archive, UEA) 对MOEA/D的控制参数进行实验, 验证该算法可有效提高MOEA/D的性能。最后, 有工作<sup>[87]</sup>将MOEA/D与协方差矩阵自适应进化策略相结合提出MOEA/D-CMAES算法, 通过限制子问题的子代解集大小节省计算成本, 并采用适应度继承和信息共享两个指标来防止早熟收敛。另外, Asafuddoula等<sup>[88]</sup>提出的I-DBEA算法系统采样出均匀分布的参考点, 利用两个独立的距离度量来平衡收敛性和多样性, 并用抢占式距离进行解关联。

通过对传统的三种策略的介绍, 能够了解到传统的3类超多目标优化算法在解决超多目标优化问题上各具特色, 具体见表2。

基于Pareto的算法在目标数较多的时候, 非支配排序对解的选择压力变低, 导致拥挤度距离成为主要的选择准则。这决定了基于Pareto的算法特点: 收敛速度慢, 但解集的多样性好。基于指标的算法通常计算耗时少, 但单一的指标可能会导致最终的解集只收敛到该指标所偏好的一个或多个Pareto前沿上的子区域, 尤其是具有复杂Pareto前沿的问题。所以, 基于指标的算法的特点为: 收敛速度快, 但解在目标空间的分布较差。基于分解的算法性能主

表2 三类传统算法优缺点比较

	优点	缺点
基于Pareto的算法	1. 当目标较少时, 算法性能较好; 2. 解集的多样性较好。	1. 随着目标数量的增加, 算法对解收敛的选择压力会降低; 2. 收敛速度慢。
基于指标的算法	1. 收敛速度快; 2. 采用单一指标选择方案, 便于理解和操作; 3. 时间成本相对较小, 算法具有较高的效率。	1. 得到的最优解集的多样性一般比较差; 2. 每个指标只关注一个收敛优势, 对于某些问题性能较差。
基于分解的算法	1. 处理具有规则和分布均匀Pareto前沿问题效果较好; 2. 合理采用分解方法可以更好地处理各种类型的问题(如利用权重和法处理凸问题)。	1. 不能很好地解决Pareto前沿不均匀的问题; 2. 权重向量的产生方式比较单一。当问题比较复杂时, 统一生成的权重向量不能很好地引导解收敛于整个Pareto前沿。

要取决于三个关键因素<sup>[88]</sup>: 参考点生成方法、平衡收敛性和多样性的方案以及将解关联到参考方向的方法。使用单纯形法<sup>[89]</sup>生成均匀分布的参考点在处理能力上存在限制。另外, 3种分解方法在不同类型

的问题上效果也不同。因此, 基于分解的算法的特点为: 处理具有规则和分布均匀Pareto前沿的问题上性能不错, 但是灵活性较差。

### 2.3 超多目标优化的其他常用方法

除上述的三类典型方法外, 还有其它几类常用方法在处理超多目标优化方面表现出较好的效果, 下面对这些方法进行介绍。

基于参考向量的算法大多数也是采用Das和Dennis的单纯形法<sup>[89]</sup>生成一组均匀分布的参考点, 然后引导种群中的个体收敛到Pareto前沿。Cheng等<sup>[90]</sup>提出一种基于参考向量的超多目标优化算法, 利用角度惩罚距离来平衡高维空间中的收敛性和多样性。同时也将参考向量与用户偏好相结合, 以整个Pareto前沿的重要子区域为首要目标进行演化。Liu等<sup>[91]</sup>采用改进的k均值聚类法从种群中抽取参考向量, 提出一种自引导的参考向量策略。同时, 还有部分工作对参考点的生成方式展开讨论。Rojas等<sup>[92]</sup>将参考点的生成方式中的均匀设计(uniform design, UD)和单纯形设计(simplex lattice design, SLD)在超多目标优化环境下进行对比, 并提出一种结合多层和均匀设计的单纯形参考点生成策略。Deb等<sup>[93]</sup>讨论生成参考点的多种方式, 并在高维目标空间中分析这些方法生成均匀分布点的能力。基于参考点的方法问题在于不能较好的处理不规则Pareto前沿, 且部分参考点生成方式高度结构化, 不能很好地适应复杂Pareto前沿。

基于协同进化的算法通常采用多个子种群协同的方式, 各个子种群独自进化的同时又通过信息交互提高整体的收敛性与多样性。Fabre等<sup>[94]</sup>专注于并行遗传算法, 采用部分隔离的子种群进行

同时进化, 并与有效的排序相结合提高在超多目标优化问题上的搜索性能。Jiao等<sup>[95]</sup>将方向向量引导到子种群划分中, 通过子种群的协同演化相互作用促进收敛, 最后再讨论欠缺探索区域以实现整体均匀分布。除这种以子种群协同促进进化的方式外, Li等<sup>[96]</sup>提出一种双准则进化(bi-criterion evolution, BCE)方法, 采用两个基于不同进化准则的种群进行协同进化。BCE利用大量的信息交互使基于Pareto和非Pareto方法的优势进行互补, 并采用种群维护和个体探索算子均衡收敛性和多样性。

基于偏好算法通常认为超多目标优化问题虽然各目标间相互冲突, 但是对决策者(decision maker, DM)并不是同等优先级。例如在能源问题中, 决策者可能更关注于能量损耗和成本这些重要的目标, 对其他目标的关注度较小。因此, 基于偏好的算法往往会采用偏好向量等方法, 改变算法的收敛方向, 仅朝着决策者更加看重的方向进化。Wang等<sup>[97]</sup>研究决策者偏好与候选解之间的共同进化, 引入偏好启发协同进化算法。Gong等<sup>[98]</sup>通过决策者的偏好将目标函数转化为期望函数, 采用超体积和期望满足度作为2个新目标函数进行优化, 以得到满足决策者偏好的Pareto前沿子集。Yu等<sup>[99]</sup>对比基于偏好和参考点的算法异同, 提出一种融合偏好和参考点的新方法, 将膝点区域知识应用于参考点以保证准确和多样性的解集。另外, 通常决策中的偏好都与真实问题中的重要目标绑定。如Cheng等<sup>[100]</sup>将一种偏好表达方法引入到3种经典算法MOEA/D、



NSGA-III和RVEA中,并在7目标混动电车控制器设计问题上验证算法对偏好解的识别能力。

基于学习的算法一般通过一些机器学习方法加强种群的收敛性和多样性的均衡,这些方法主要包括强化学习、贝叶斯学习和集成学习等。Zhang等<sup>[101]</sup>将基于知识的表示和NSGA-III相结合,用于搜索决策空间中Pareto最优模式。Ma等<sup>[102]</sup>将强化学习与参考向量方法结合,将参考向量的适应过程视为一个强化学习任务,从环境反馈中进行学习,并将算法应用到一个工业铜配料问题的求解。除直接加强演化过程外,还有部分工作将机器学习方法应用于算子以加强对有效解的搜索。Sagawa等<sup>[103]</sup>提出一种结合智能变量选择方法的机器学习来增强重组算子,基于变量在目标空间排序的重要程度收敛到Pareto前沿。Mittal等<sup>[104]</sup>根据优化器在连续几代获得非支配解的时间序列存在显著模式为基,使用机器学习模型协助后代解朝着有用方向发展。

目标约简一般通过一定分析手段对目标进行降维,保留冲突较为严重的目标进行优化。也有部分算法直接采用目标转化的方式,通过指标等形式将原始目标转化为少量目标,采用多目标优化思想对新的问题进行优化。Liu等<sup>[105]</sup>提出一种基于分解和超平面拟合的目标降维方法,以处理非线性Pareto前沿。Li等<sup>[106]</sup>利用具有非负稀疏系数的超平面来粗略逼近PF的结构,并提出2种目标约简方法。Cheung等<sup>[107]</sup>提出一种针对超多目标优化问题的目标提取方法,将简化后的目标表述为原目标的线性组合,使简化后的目标之间冲突最大化。此外,还有部分研究工作将目标进行转化,将高维问题转化为低维问题。Wang等<sup>[108]</sup>将多目标优化问题转化为双目标优化问题,通过权重向量更有效地评价个体之间的支配关系,进而增加选择压力。同时引入双准则演化,更好地平衡Pareto最优解的收敛性和多样性。Liu等<sup>[109]</sup>通过两个收敛性和多样性指标将高维目标空间转化为低维目标空间,然后提出一种基于聚类的顺序选择策略在变换后的多目标空间中指导进化搜索过程。但这类算法的问题在于降维后新问题的Pareto前沿是否发生变化,改变幅度以及产生的影响未知,需要进行详细分析。

基于代理模型的算法针对真实世界中的昂贵优化问题设计。针对优化过程中是否允许进化算法主动生成新数据可分为不同的两类<sup>[110]</sup>:第一类是离线优化方法,即优化过程中不会有新的数据主动产

生。第二类是在线优化方法,即可以为代理模型的管理提供额外的数据。对于离线优化算法,代理模型的管理策略依赖于给定可用数据的质量和数量,大致可分为三类:1、质量不理想的数据:不完整、不平衡甚至有噪声的数据;2、大数据:数据量大,构建代理模型的计算成本增加;3、小数据:数据量验证不足,使模型的训练不充分。针对离线优化方法的三种问题,通常可采用数据预处理<sup>[90]</sup>,数据挖掘<sup>[111]</sup>或合成数据生成<sup>[112]</sup>(synthetic data generation)的方式处理。由于离线优化算法也可用于在线方法,因此在线优化算法主要考虑的是优化期间的代理管理策略。一次迭代中新产生的数据可能不由算法进行控制,在这种情况下,及时捕捉其中的信息指导优化过程能够有效保证算法的精度。因此有基于个体<sup>[57,113]</sup>和基于代<sup>[114]</sup>的两种代理管理策略。基于代的策略通过代来调整新数据生成的采样频率,而基于个体的策略则选择在每代中对部分个体进行采样。

除这9种典型方法外,一些其他类型的算法分类在图6和图7的“其他”中。这些算法的形式多样化,往往根据问题的特性对算法进行特殊设计<sup>[64,65,85,115-118]</sup>。还有部分研究如机器学习辅助决策制定<sup>[119]</sup>、高维空间Pareto前沿可视化<sup>[120,121]</sup>、区间优化处理技术<sup>[122]</sup>、约束处理技术<sup>[123-129]</sup>等也对领域的发展起到促进作用,都是必不可少的一环。

### 3 超多目标优化研究方法

#### 3.1 基准测试函数

##### 3.1.1 测试函数设计原则和经典测试函数集

早期研究以多目标优化问题为主,设计的测试函数大多采用几个相互冲突目标函数同时寻优的方法。例如经典的Schaffer (SCH)<sup>[130]</sup>测试函数采用两个最小化单目标函数,表示如下:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= x^2 \\ f_2(x) &= (x-2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这种方式设计出来的多目标测试函数不够灵活,目标数量以及问题性质都是固定的。因此,在当时的背景下设计出一组包含各种特点的多目标测试问题集是一项有意义的工作。通常设计多目标测试函数涉及三种不同的基本函数<sup>[18]</sup>:分布函数 $f$ 、距离函数 $g$ 和形状函数 $h$ 。首先,分布函数 $f$ 能够改变Pareto前沿的分布情况,例如可以让Pareto前沿上各处点的密度不同。分布函数 $f$ 的作用是测试算法在Pareto前沿保持多样性的能力。距离函数 $g$ 决定问题在目标空间中的搜索范围,控制目标空间上

下界。距离函数 $g$ 的作用是测试算法收敛到Pareto前沿的能力。最后，形状函数 $h$ 定义Pareto前沿的形状。不同Pareto前沿的形状使问题变得更复杂，从而导致算法的优化性能变差。例如MOEA/D中的权重和法在凸面的情况下性能好，但非凸的时不能获得所有的Pareto最优解。通过3个基本函数的有效结合，能使一组测试函数集具备不同特性。接下来以DTLZ2为例，详细介绍多目标测试函数的设计原则。DTLZ2的数学表示如公式(11)所示：

$$\left. \begin{aligned} \min f_1(x) &= (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2) \dots \\ &\quad \cos(x_{M-2}\pi/2)\cos(x_{M-1}\pi/2) \\ \min f_2(x) &= (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2) \dots \\ &\quad \cos(x_{M-2}\pi/2)\sin(x_{M-1}\pi/2) \\ \min f_3(x) &= (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2) \dots \\ &\quad \cos(x_{M-3}\pi/2)\sin(x_{M-2}\pi/2) \\ &\quad \vdots \\ \min f_{M-1}(x) &= (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2) \\ &\quad \sin(x_2\pi/2) \\ \min f_M(x) &= (1 + g(x_M))\sin(x_1\pi/2) \\ 0 \leq x_i &\leq 1, i = 1, 2, \dots, D, \\ g(x_M) &= \sum_{x_i \in X_M} (x_i - 0.5)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中， $g(x_M)$ 为距离函数 $g$ ， $1 + g(x_M)$ 的作用是使搜索范围处在目标空间中大于1的范围。每个目标函数的后半部分是形状函数 $h$ ，此处为球体参数方程在 $M$ 维目标空间的推广。因此，该形状函数使Pareto前沿的形状为空间中的超球体。由于决策空间中的每一维 $x_i$ 的范围限制在区间 $[0,1]$ 内，所以3目标DTLZ2的Pareto前沿形状为第一象限内的八分之一球面。另外，DTLZ2的Pareto前沿在空间中分布均匀，这是由分布函数 $f$ 控制。因为分布函数 $f$ 取为常数函数1，所以在公式中并没体现。通常设计多目标优化函数集时为模拟真实情况会考虑多峰、多模态、可分性等方面特性，因此同一组问题一般具有不同特点，如ZDT<sup>[131]</sup>和UF<sup>[132]</sup>等。Zitzler等<sup>[131]</sup>在2000年时提出ZDT测试函数集包含6个问题（ZDT1-6），每个问题都具有不同的性质，能够在不同角度检验算法的性能。

ZDT测试函数集解决了性质固定问题，但目标

数量固定为2。部分研究中需要一些3目标甚至超多目标问题检验算法性能，虽然能按照之前的方法设计出超多目标优化问题，但不够灵活，当改变目标数量时又需要增加新的目标函数。设计出一组能够动态扩展目标数的测试函数集成为当时亟待解决的问题，因此相继提出了DTLZ<sup>[10]</sup>和WFG<sup>[11,12]</sup>等。

除目标数外，决策变量也是一项可扩展属性。近些年来，大规模优化在多目标领域也渐渐成为研究的热点。基于此，Cheng等<sup>[18]</sup>在2017年专门针对大规模多目标优化提出LSMOP测试函数集。LSMOP除可变目标数外，还涵盖大规模优化特点。这些目标可扩展测试函数集中每个问题都具有不同特点，每组中各问题的性质变化将在3.1.2和3.1.3节中详细介绍。

### 3.1.2 超多目标优化测试函数

为了更好的验证算法性能，测试问题集中的必须包含多种角度的复杂特点，可通过改变3个基本函数实现。例如DTLZ<sup>[10]</sup>，WFG<sup>[11,12]</sup>等，能够保证目标数量的可扩展性，测试算法在不同情形下的性能表现。接下来，将介绍这些在超多目标优化领域经典的测试函数集。

首先，使用较多的是Deb等<sup>[10]</sup>在2005年提出的DTLZ测试函数集，包含9个具有不同特点的测试函数。DTLZ2是这组问题的基础，具有均匀分布的Pareto前沿。DTLZ1和DTLZ3-7都是在DTLZ2的基础上，改变分布函数使问题特点发生变化。DTLZ8是通过表面约束法由多个超立方体拼接实现。DTLZ9相当于Pareto密度不均匀的DTLZ5。其中，DTLZ1和DTLZ3存在局部的Pareto前沿，可用来验证算法逃离局部最优的能力。DTLZ4的Pareto前沿分布不均匀（目标空间不同位置解的密度不同），可用来验证算法保持多样性的能力。DTLZ5和DTLZ6具有缺失（退化）的Pareto前沿，且DTLZ6比DTLZ5更难收敛，可用来验证算法在退化Pareto前沿上保持收敛性和多样性的能力。DTLZ7的Pareto前沿是不连续的，包含 $2^{M-1}$ 个子Pareto前沿，这可以用来测试算法在多个子区域内保持解的能力。DTLZ8和DTLZ9是两个具有约束的测试函数。图8给出DTLZ测试函数集上DTLZ1、DTLZ2、DTLZ5和DTLZ7的Pareto前沿形状，可以看出各问题存在不同的求解难点。

表3 WFG测试函数集各问题的特点

问题	目标范围	Pareto前沿	偏差	形态	可分性
WFG1	$f_{1:M}$	convex, mixed	polynomial, falt	unimodal	separable
WFG2	$f_{1:M-1}$	convex, disconnected	-	unimodal	non-separable
	$f_M$	convex, disconnected	-	multiimodal	non-separable
WFG3	$f_{1:M}$	linear, degenerate	-	multimodal	non-separable
WFG4	$f_{1:M}$	concave	-	unimodal	separable
WFG5	$f_{1:M}$	concave	-	deceptive	separable
WFG6	$f_{1:M}$	concave	-	unimodal	non-separable
WFG7	$f_{1:M}$	concave	parameter, dependent	unimodal	separable
WFG8	$f_{1:M}$	concave	parameter, dependent	unimodal	non-separable
WFG9	$f_{1:M}$	concave	parameter, dependent	mixed	non-separable

表4 LSMOP测试函数集各问题的特点

问题	Pareto前沿	Pareto集	形态	可分性
LSMOP1	linear	linear VL	unimodal	fully
LSMOP2	linear	linear VL	mixed	partially
LSMOP3	linear	linear VL	multimodal	mixed
LSMOP4	linear	linear VL	mixed	mixed
LSMOP5	convex	nonlinear VL	unimodal	fully
LSMOP6	convex	nonlinear VL	mixed	partially
LSMOP7	convex	nonlinear VL	multimodal	mixed
LSMOP8	convex	nonlinear VL	mixed	mixed
LSMOP9	disconnected	nonlinear VL	mixed	fully

\*VL表示变量间的联系(variable linkages)

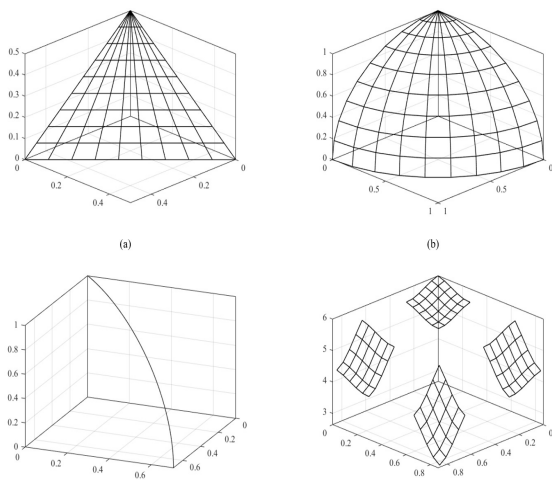


图8 DTLZ测试问题集中典型的Pareto前沿(3目标); (a) DTLZ1; (b) DTLZ2; (c) DTLZ5; (d) DTLZ7

Huband等<sup>[11,12]</sup>提出的WFG测试函数集是另一组目标可扩展的测试函数集, 带来更多新特性。表3给出WFG中每个问题的特点, 例如存在参数间依赖(dependent)和多项式关系(polynomial)等。Pareto前沿有单模态(unimodal)、多模态(multimodal)以及欺骗性(deceptive)的划分。可分性上有可分(separable)和不可分(non-separable)的区别。除WFG2外, 其它问题在所有目标上的特性表现一致。WFG2的前M-1个目标是

单模态的, 第M个目标是多模态的。最后, 各问题的Pareto前沿特点也不同。其中, WFG1和WFG2具有凸面(convex) Pareto前沿, WFG1具有混合(mixed)特点, WFG2具有不连续特点。WFG3是线性(linear)且退化的(degenerate), WFG4-9都是凹面(concave)。

### 3.1.3 具有优化困难的超多目标基准测试函数

除DTLZ和WFG测试函数集外, 还有一些目标可扩展的测试问题集, 如LSMOP<sup>[18]</sup>和MaF<sup>[133]</sup>。其中, MaF是2018年国际进化计算会议中超多目标优化竞赛指定测试函数集, 又称为CEC 2018。在MaF测试问题集中共有15个测试问题, 包含对DTLZ和WFG中部分问题的变形, 如Pareto前沿倒置。此外, 还包含2个距离最小化问题MaF8和MaF9, 以及2个大规模问题MaF14和MaF15。因此, MaF具有较大的求解难度, 能够很好的检验超多目标优化算法的性能。

另外, Cheng等分析现实多目标优化问题可能涉及大量的决策变量, 设计出一组大规模多目标优化问题<sup>[18]</sup>。这组问题主要考虑决策变量和目标数量的可扩展性, LSMOP的决策变量的维度D默认取值为M\*100。此外, 为能够验证算法在不同特点的问题上的性能, 还考虑决策变量的混合可分性以及决策变量与目标间的非一致

表5 各类指标整理

指标类型	名称	作者	年份	是否需要其他参数	
多样性	延展性	OS	Wu等	2001	好点PG和坏点PB
	分布性	SP	Zitzler等	2000	-
		$\Delta'$	Zitzler等	2000	-
收敛性	GD	Van等	1999	集合P	
	$I_{\epsilon+}$	Zitzler等	2003	集合P	
收敛性-多样性	HV	Zitzler等	1998	参考集R	
	IGD	Van等	1999	集合P	

相关性<sup>[18]</sup>, LSMOP中每个问题的特点可见表4。LSMOP在形态上除单模态和多模态外, 还有类似WFG2的混合模态 (mixed)。在可分性上有完全可分 (fully)、部分可分 (partially) 以及混合可分 (mixed), Pareto前沿具有线性 (linear) 和凸面 (convex), 但LSMOP9是不连续的 (disconnected)。此外, LSMOP的Pareto集的变量间关系也分为线性和非线性 (nonlinear)。

### 3.2 性能指标

在多目标和超多目标优化中, 最终的最优解集S需要一定的评价标准衡量好坏。最优解集在某个指标上的优劣可以从某些方面说明该算法处理某个或某类问题的性能。下面介绍一些常用指标。

在多目标优化中, 评价指标一般基于三个标准<sup>[134]</sup>: 容量 (capacity)、收敛性 (convergence) 以及多样性 (diversity)。其中, 容量指标体现一个算法获得非支配解的能力, 一般用来记录最优解集中非支配解的个数或比例。收敛性指标体现最优解集S与问题Pareto前沿 (集合P) 的临近程度, 即测试算法能否真正收敛或收敛程度。多样性指标包含分布性和延展性。分布性衡量分布的均匀性, 延展性衡量在极值点处获得解的能力<sup>[134]</sup>。另外, 这些指标在衡量与Pareto前沿的关系时, 通常会采用在Pareto前沿上均匀采样的集合R作为比较对象。

除这3类评价指标外, 还有一类评价指标能够同时衡量最优解集的收敛性和多样性, 一般称为收敛性多样性指标。由于在超多目标优化中非支配解的比例和数量都非常高, 因此几乎不考虑容量指标, 本节不在过多介绍这类指标。此外, 表5中给出本节所列指标的统计信息。接下来, 将详细介绍这几类评价指标。

#### 3.2.1 多样性指标

多样性指标考虑种群的分布情况, 包括分布性和延展性两部分, 例如SP<sup>[131]</sup>和OS<sup>[135]</sup>等指标; 多样性指标描述最优解集S在目标空间的分布性和延展性。图9给出多样性指标两个特性情况。

图9中3个子图分别表示不同解集的分布情况。其中, 黑点表示最优解集S中的解, 曲线表示Pareto前沿。图9 (a) 中的最优解集在目标空间中的分布性不错, 但延展性较差, 在两个目标的极值点处都没有解分布。图9 (b) 中的解集具有较好的延展性, 能够在极值点 (边界) 处取得点。但该解集在Pareto前沿的中间部分却鲜有点分布, 分布性较差。图9 (c) 中最优解集的分布是一种比较理想的情况, 获得极值点的同时还能够保持良好的分布性。若算法的最优解集能够达到图9 (c) 的分布情况, 则可认为该算法平衡多样性的能力较强。

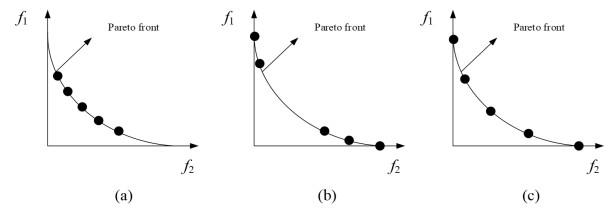


图9 多样性指标的分布性和延展性特点

$\Delta'$  指标<sup>[131]</sup>是一种描述分布性的多样性指标, 由最优解集S中两两解间的差值计算出来的, 公式表示如下:

$$\Delta'(S) = \sum_{i=1}^{|S|-1} \frac{(d_i - d_{avg})}{|S| - 1} \quad (12)$$

其中,  $d_i$  表示的是最优解集S中连续解的欧氏距离,  $d_{avg}$  表示连续解间的平均距离。从式 (12) 可以看出, 当所有连续解间的距离都相等 ( $d_i$  都固定为一个值) 时, 即  $\Delta'$  的值为0时具有良好的分布性。但在计算指标前, 需要对最优解集S中的解先按字典顺序排序, 然后按照连续解的顺序计算距离, 不能直接按照错乱顺序计算两解间的距离。

间距指标 (spacing, SP)<sup>[131]</sup>也是一种分布性指标。相对于计算两两连续解的距离, SP计算的是成对解间的最近距离, 其公式表述如下:

$$SP(S) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{|S|-1} (d_i - \bar{d})^2}{(|S| - 1)}} \quad (13)$$

$$d_i = \min \|F(\vec{s}_i) - F(\vec{s}_j)\|, \quad (14)$$

$$s_i \in S, \vec{s}_j \in S, \vec{s}_j \neq \vec{s}_i$$

### 3.2.2 收敛性指标

收敛性指标考虑种群收敛到Pareto前沿的情况, 例如GD<sup>[13,136]</sup>和 $I_{\epsilon+}$ <sup>[137]</sup>等。收敛性指标主要是根据最优解集 $S$ 中的解到集合 $P$ 中解的距离来度量收敛性。其中, 世代距离 (generation distance, GD)<sup>[13,136]</sup>是比较常用的收敛性指标, 其数学描述为:

$$GD(S, P) = \frac{(\sum_{i=1}^{|S|} d_i^q)^{\frac{1}{q}}}{|S|} \quad (15)$$

其中, 距离 $d$ 表示的最优解集 $S$ 中的第 $i$ 个解到集合 $P$ 中的所有解的距离的最小值, 数学表示如下:

$$d_i = \min \|F(\vec{s}_i) - F(\vec{p})\|, \vec{s}_i \in S, \vec{p} \in P \quad (16)$$

其中, 符号 $\|\cdot\|$ 表示欧氏距离, 所以式(15)中的 $q$ 的取值为2。此外, 还有两个相似的 $\gamma$ 指标<sup>[13]</sup>和 $M_1^*$ 指标<sup>[131]</sup>将 $q$ 取值为1。

Zitzler等<sup>[137]</sup>在2003年来提出一种 $I_{\epsilon+}$ 指标, 该指标描述的是, 让最优解集 $S$ 支配集合 $P$ 所需要在空间中平移的最小距离, 其公式表示如下:

$$I_{\epsilon+}(S, P) = \inf \{ \forall \vec{p} \in P \exists \vec{s} \in S : \vec{s} \preceq \vec{p} + \epsilon \} \quad (17)$$

其中,  $I_{\epsilon+}$ 表示的是最小距离, 有时也可用乘法替换加法作为替代的选择。

### 3.2.3 收敛性多样性指标

这类指标综合考虑收敛性和多样性, 是目前最常用于评价算法性能的指标, 如HV<sup>[138,139]</sup>和IGD<sup>[84,136,137]</sup>。在没有决策偏好介入情况下, 多目标优化中应该首要考虑最优解集 $S$ 的收敛性和多样性。目前, 已有一些收敛性多样性指标被提出。如Zitzler等<sup>[138,139]</sup>提出超体积 (hypervolume, HV) 评价最优解集 $S$ 与一组预设参考点形成超体积大小, 公式如下:

$$HV(S, R) = \text{volume}(\bigcup_{i=1}^{|S|} v_i) \quad (18)$$

其中,  $R$ 表示预设的参考点集合, 一般设置为一组目标函数值较差的向量。从几何性质看, 当收敛性越好时, 最优解集 $S$ 中的点越靠近Pareto前沿, 与参考点集 $R$ 中形成的超体积越大。当多样性越好时, 最优解集 $S$ 与参考点集 $R$ 形成的超体积越大。下面将用一个2目标问题来简述HV的几何意义。

如图10所示, 黑色的点表示最优解集 $S$ 中的解, 红色的点表示预设的参考点集合, 黑色加粗实线表

示Pareto前沿, 黑色虚线表示搜索边界。为描述方便, 这里仅设置一个参考点。HV指标的大小就是由参考点与最优解集 $S$ 中的解形成的超体积的大小, 即蓝色虚线所包围的体积大小。从几何意义看, 当蓝色区域所包围的超体积越大表示最优解集 $S$ 的收敛性和多样性越好。

反世代距离 (inverted generational distance, IGD)<sup>[84,136,137]</sup>是另一个较为常用的评价收敛性和多样性的指标, 数学表示如下:

$$IGD(P, S) = \frac{(\sum_{i=1}^{|P|} d_i^q)^{\frac{1}{q}}}{|P|} \quad (19)$$

$$d_i = \min \|F(\vec{p}_i) - F(\vec{s})\|, \vec{p}_i \in P, \vec{s} \in S \quad (20)$$

其中,  $q = 2$ ,  $d_i$ 是集合 $P$ 中的点到最优解集 $S$ 中的点的最小距离。

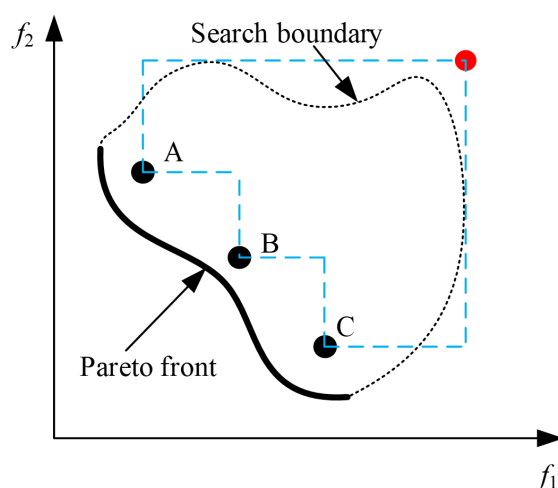


图 10 HV指标几何意义

在多目标和超多目标算法进行性能测试时, 性能指标是评价算法性能的有效手段, 但不同评价指标间也存在着冲突。以IGD和HV举例, IGD更注重Pareto前沿采样到最优解集 $S$ 的距离, HV更注重最优解集 $S$ 与参考点集围成的超体积大小。最优解集 $S$ 中如果能在极值点处获得解可能更有助于计算HV指标, 但可能在IGD指标上可能表现较差。常会出现同样2个最优解集, 计算出来的HV和IGD指标后得出的结果不同。这是由于指标的侧重点不同导致的差异。因此在进行算法性能评价时, 常会选用多个指标综合比较, 同时用非参数检验 (如Friedman检验和Wilcoxon符号秩检验) 方法辅助分析最终结果。从指标定义出发, 如果算法的最优解集能够在收敛性和多样性保持良好的均衡, 那么其在大部分指标上应该都能得出较好的结果。

表6 非参数检验下各算法HV指标对比

Indicator	M	SPEA/R	ARMOEA	MOEA/D-URAW	PICEA-g	BiGE
Wilcoxon	3	4/11/7	10/1/11	12/2/8	8/5/9	/
	5	3/13/6	11/5/6	11/2/9	5/6/11	/
	8	4/12/6	13/6/3	8/6/8	6/13/3	/
	10	5/7/10	13/3/6	11/5/6	6/11/5	/
	15	4/11/7	13/5/4	11/4/7	10/6/6	/
Friedman	3	1/4/17	6/0/16	10/1/11	3/0/19	/
	5	1/6/15	6/2/14	6/1/15	1/2/19	/
	8	0/8/14	7/2/13	6/1/15	2/6/14	/
	10	0/4/18	8/2/12	8/0/14	2/3/17	/
	15	1/4/17	10/3/9	9/3/10	1/4/17	/

表7 各算法在不同目标下获得最大HV指标的实例数量

M	SPEA/R	ARMOEA	MOEA/D-URAW	PICEA-g	BiGE
3	2	6	7	3	4
5	1	6	10	1	4
8	0	8	6	2	6
10	1	9	6	3	3
15	0	9	9	1	3

#### 4 超多目标优化应用实例及未来研究分析

本节首先从超多目标优化的应用展开, 给出第1节中提到的部分超多目标优化问题的应用实例, 并对其中典型的算法和问题展开实验分析, 以验证超多目标优化算法在实际应用场景下的性能。其次, 通过以上几节内容的整理和分析, 本节还将继续剖析和预测超多目标优化领域的未来研究热点。

##### 4.1 超多目标优化应用实例

在超多目标优化应用实例中, 除对高维目标空间中收敛性和多样性的平衡外, 还有一个重要的目标是对约束的处理, 尤其是不等式约束。一般方法是采用不等式约束转化等式约束进行处理, 约束处理对超多目标优化应用实例的研究具有深远意义。图11给出本文整理的超多目标优化应用列表, 下面对这些应用实例展开论述。

##### 4.1.1 一般超多目标优化问题实例

从表1的数据可知, 当前对超多目标优化应用研究不断展开, 多项工程优化相关工作中也给出不同的问题定义和求解方法。以无人机的概念设计<sup>[140]</sup>为例, 通过多目标优化角度求解有利于为决策者提供大量可供权衡的设计方案。针对无人机问题, 在飞机性能和稳定性约束下, 有研究<sup>[140]</sup>构建出以起飞总重量、阻力系数、起飞距离、所需动力、升力系数和续航时间为目标的超多目标优化问题。并将基于分解的算法与基于种群或元启发式的方法相结合, 采用非支配关系对Pareto前沿估计, 使飞机概念设计问题得到较好的求解。

高速列车的轻量化和结构优化设计是一项工程设计中必须考虑的要素, 有助于节省成本和提高能效等。就车体结构而言, 在满足一些物理特性的情况下列车保证高速安全的运转, 去除冗余结构或优化整体结构是设计研究的核心问题之一<sup>[141]</sup>。姚曙光等<sup>[142]</sup>建立以车体承载结构质量为目标函数的优化模型, 采用约束违反函数构造新的目标函数处理约束, 通过共轭梯度法和最小二乘法等展开求解。有研究<sup>[141]</sup>构建出刚度、强度和质量的多目标优化模型, 采用基于SPMD并行的NSGA-III联合仿真优化方法求解。相比于传统串行优化方法提高了计算效率, 同时能为决策提供更多可供选择的解。

轨道交通随着城市化进程发展逐渐成为大众出行的主流方式<sup>[143]</sup>, 但提高轨道安全性是一项重要的工作, 能够有效减少人员伤亡和经济损失<sup>[143]</sup>。吸能结构是车头进行能量转换的重要方式之一, 是铁路车辆安全防护系统的重要组成部分。针对吸能结构的优化设计, Xie等<sup>[144]</sup>提出一种基于代理模型的求解方案。该研究采用多项式响应面法和Kriging模型作为代理模型, 对数据样本训练得到目标间的响应关系以进行进一步求解。Peng等<sup>[145]</sup>建立吸能结构的有限元模型, 然后通过NSGA-II和多项式响应面法对吸能结构的耐撞性进行优化。Zhang等<sup>[143]</sup>结合多准则决策理论, 提出一种多策略的多目标人工蜂群算法解决能量转换的结构优化问题。

除以上介绍的工程应用实例外, 超多目标优化算法还被广泛应用于处理各种领域的专业性问题的。

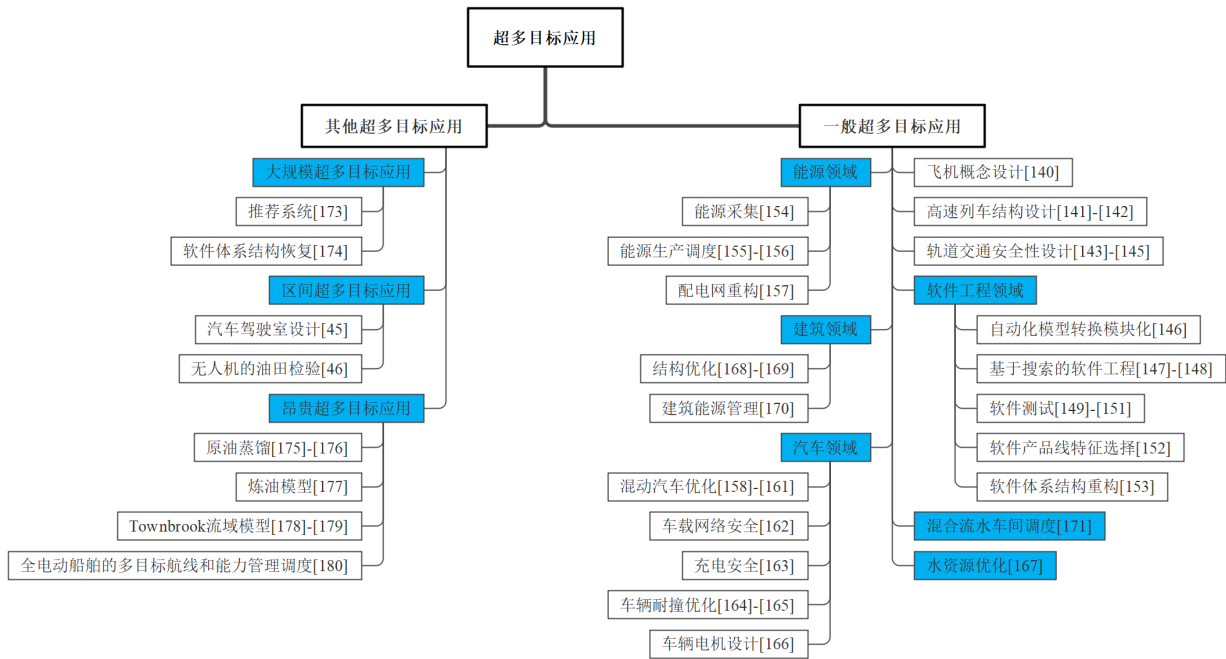


图 11 超多目标应用实例整理

这些应用包括且不限于软件工程领域的自动化模型转换模块化<sup>[146]</sup>、基于搜索的软件工程<sup>[147,148]</sup>、软件测试<sup>[149-151]</sup>、软件产品线特征选择<sup>[152]</sup>、软件体系结构重构<sup>[153]</sup>等，能源领域的能源采集<sup>[154]</sup>、能源生产调度<sup>[155,156]</sup>、配电网重构<sup>[157]</sup>等，汽车领域的混动汽车优化<sup>[158-161]</sup>、车载网络安全<sup>[162]</sup>、充电安全<sup>[163]</sup>、车辆碰撞优化<sup>[164,165]</sup>、车辆电机设计<sup>[166]</sup>等，水资源优化<sup>[167]</sup>，建筑领域的结构优化<sup>[168,169]</sup>、建筑能源管理<sup>[170]</sup>，以及流水车间调度<sup>[171]</sup>等。

最后，还有工作<sup>[172]</sup>归纳总结部分经典文献中的应用实例，并采用约束转化的方式进行约束处理，由此得到一组关于实际应用的测试问题集，称为RE测试问题集。在这组测试问题集中包含16个无约束（通过约束处理）的真实问题和8个带约束（约束未处理）的真实问题，目标的数量从2到9不等。从问题定义而言，这组从实际应用中抽取的测试问题比通过标准函数（如三角函数）构建处理的基准测试问题（如DTLZ、WFG等）在实际问题的解决方面具有深远意义。首先，在Pareto前沿方面，基准测试问题的Pareto前沿较为规则，而真实问题的Pareto前沿位置且大多数是不规则的，这与RE测试问题相符合。其次，在问题特点方面，基准测试问题中部分由函数变换和决策变量约束构建的问题特征可能不会出现在真正的问题上。而真实问题的某些特征也可能无法通过这种标准函数的方式进行构建。因此由以上两点来看，在RE测试问题集上展开研究对实际问题的求解具有一定现实意义。

#### 4.1.2 其他超多目标优化问题实例

4.1.1节给出部分一般超多目标优化问题实例，同时，针对1.3节中的其他超多目标优化问题也有相应案例。Cao等<sup>[173]</sup>为提高推荐系统性能以更好的挖掘物联网中产生的数据，提出了一个以F1测度、推荐新颖性、推荐覆盖率、客户满意度、地标相似性和过拟合的6目标优化问题。智能物联网人机交互产生的数据中许多带位置标签的图像数据可用于个性化的推荐<sup>[173]</sup>，但这些标签的大规模分布和用户偏好导致其为大规模超多目标优化问题。该工作采用1.3.1节中提到的问题转化法处理推荐系统中的矩阵分解模型，在F1测度上得到有效提升。Prajapati<sup>[174]</sup>的研究中提出一个以每个软件组件的元素、系统中总组件、单元元素组件、组件间依赖、组件内部依赖、模块化质量和组件循环依赖为目标的软件体系结构恢复模型，属于大规模超多目标优化问题<sup>[174]</sup>。将平衡适应度评价、基于质量指标的适应度评价、模糊Pareto优势和双存档外部存储策略引入到大规模超多目标粒子群优化算法中进行求解。此外，Prajapati还将基于网格的超多目标粒子群优化算法用于处理大规模超多目标软件模块聚类问题，问题的定义与软件体系结构恢复类似，共包含类中最大和最小模块差值、类数量、所有类的边界间和、所有类的内边缘和、模块化质量、源和所有其他可达类之间的平均最短路径长度以及类的循环依赖关系7个目标。

区间超多目标应用中除涉及常规的高维目标和约束等条件外,还存在一个影响不确定性的区间,这在现实应用中也普遍存在。Gong等<sup>[45]</sup>在目标空间中引入不精确因子<sup>[47]</sup>将汽车驾驶室设计问题转化为区间优化问题。通过目标转化将原有的9个不确定性目标转化为2个确定的目标,即超体积和不精确度。其中,超体积保证问题在收敛性和多样性上的平衡,不精确度则保证区间的不确定性影响。并提出一种基于集合的遗传算法在收敛性和不确定性之间取得有效平衡。Ge等<sup>[46]</sup>建立起三维油田检验任务模型,包含飞行距离、飞行稳定性、无人机使用数量、到达任务点的时间偏移量和实际飞行距离与估计距离的误差这5个目标。这些目标取值在不同上下界区间范围内,也是一个区间超多目标优化问题。该工作引入物元可拓模型,使优化解集接近Pareto最优解。此外,通过 $k$ 均值算法求解初始解集以提高算法的优化性能和种群多样性,并将果蝇局部优化算法与遗传算法相结合进行求解。

昂贵超多目标优化问题的实例常存在于工业、设计等领域的复杂环境中,采用代理模型的方式训练模型预测评估昂贵的目标。如原油蒸馏系统<sup>[175]</sup>中需要考虑产品产量和能源消耗这些主要因素,同时还需要考虑原油变化、柱状溢流(column flooding)、传热瓶颈和产品质量规格,属于昂贵超多目标优化问题。Guo等<sup>[176]</sup>的一项研究中采用计算效率高的dropout神经网络取代高斯过程,并提出一种新的模型管理策略实现收敛性和多样性的平衡。Han等<sup>[177]</sup>构建了一个炼油模型,采用Kriging模型逼近每个目标函数,并通过填充准则与权重向量和种群分布信息相结合的模型管理策略平衡收敛性和多样性。Wang等<sup>[178]</sup>将代理模型辅助的超多目标优化算法用于求解环境领域的Townbrook流域模型<sup>[179]</sup>,将径向基函数代理模型与 $\varepsilon$ 支配相结合,并引入双层重启机制防止算法陷入局部最优。Hein等<sup>[180]</sup>将数据驱动进化优化的思想引入到具有配电储能和太阳能光伏的全电动船舶的多目标航线和能力管理调度问题中。利用LSTM神经网络在环境因素、光伏特性和作业时间的基础上进行光伏预测,并与NSGA-II和NSGA-III结合以提高航次和能源调度精度。随着现实优化问题难度加大,代理模型辅助的进化优化已逐渐成为研究热点,是一个重要发展方向。同时,代理模型的应用也不仅限于对昂贵优化问题求解,在动态优化等问题上的预测能力也会是具有潜力的发展方向。

总之,超多目标优化问题存在于生活的方方面面。很多复杂系统中包含大量的目标、决策变量和约束等条件,都需通过超多目标优化的角度处理。

## 4.2 超多目标优化算法实验分析

本文第2节中介绍了部分超多目标优化算法,除基于代理模型的算法是处理昂贵优化问题的方法外,其他均是处理超多目标优化问题的经典方法。本节将从实验分析角度出发,选取经典方法中的代表性算法以及经典测试问题集和几个实际问题进行实验,从结果中进一步剖析各类算法在具有不同特点问题上的优缺点。

### 4.2.1 实验与参数设置

本节实验主要分为2部分,第1部分选取目标可扩展的2个多目标测试问题集,即DTLZ<sup>[10]</sup>和MaF<sup>[133]</sup>,这2个测试问题集已在3.1节进行介绍。整体而言,DTLZ测试问题集的Pareto前沿较为规则,主要用来测试几种算法在不同问题特性条件下的收敛性和多样性保持能力。MaF测试问题集中包含对已有问题(如DTLZ和WFG)的倒置、真实优化问题、大规模优化问题。因此,第1部分实验主要分析各类算法在不同问题上的性能表现。

第2部分实验选取几个真实应用作为背景,测试几个算法在真实应用上的性能。本节主要选择焊接梁设计(welded beam design, WBD)、减速机设计(speed reducer design, SRD)、轮系设计(gear train design, GTD)以及水资源规划(water resource planning, WRP)问题进行测试。由于对比算法在设计之初没有考虑对约束的处理,因此将采取最近一份文献<sup>[172]</sup>中的策略将这些问题中的约束转化为目标处理。主要思想是将约束违反值的总和作为附加目标函数<sup>[172]</sup>,即通过约束转化为目标的形式进行处理。经过这种处理后,新问题的目标数量会在原有的基础上加1。

本节实验对算法的性能评估采用收敛性和多样性指标,即IGD和HV。其中IGD指标越小表示解集的收敛性和多样性越好,即算法的性能更好,而HV的结果则是越大越好。另外,对实际问题,Pareto前沿的情况未知,不能通过对Pareto前沿采样的形式计算IGD指标。因此,对于实际问题来说,采用HV指标对算法的性能进行评估。由于HV指标计算需要提供参考点,本节实验中以各算法在实际问题上多次运行的结果中选取参考点计算HV指标。

本节将选取SPEA/R<sup>[181]</sup>、ARMOEA<sup>[182]</sup>、MOEA/D-URAW<sup>[81]</sup>、PICEA-g<sup>[97]</sup>和BiGE<sup>[183]</sup>这几



表 8 非参数检验下各算法IGD指标对比

Indicator	M	SPEA/R	ARMOEA	MOEA/D-URAW	PICEA-g	BiGE
Wilcoxon	3	8/12/2	13/0/9	14/2/6	10/6/6	/
	5	6/9/7	20/0/2	19/1/2	12/6/4	/
	8	8/9/5	18/1/3	17/0/5	9/9/4	/
	10	8/11/3	17/1/4	17/3/2	9/9/4	/
	15	5/6/11	17/2/3	17/1/4	15/4/3	/
Friedman	3	0/5/17	7/0/15	10/1/11	8/0/14	/
	5	2/2/18	9/0/13	11/0/11	4/0/18	/
	8	3/1/18	10/1/11	13/0/9	4/0/18	/
	10	0/2/20	10/1/11	14/0/8	3/2/17	/
	15	4/1/17	14/1/7	10/1/11	2/1/19	/

个算法作为对比, 分别代表了基于Pareto、指标、分解、偏好+协同进化以及目标降维这几类算法。对测试问题的目标数量M分别设置为3、5、8、10和15, 各目标数对应的最大函数评估值为 $M * 10^4/2$ 。各目标数量对应的决策变量维度D如下, DTLZ1为 $M + 4$ , DTLZ2-6为 $M + 9$ , DTLZ7为 $M + 19$ 。MaF测试集对应的决策变量数设置为: MaF1-6为 $M + 9$ , MaF7为 $M + 19$ , MaF8-9为2, MaF10-12为 $M + 9$ , MaF13为5。此外, MaF14-15是大规模优化问题。将决策变量的维数分别设为64、106、169、213和322。各目标数下所有问题的种群规模N均设置为100, 并进行30次独立运行。对实际问题, 由于目标数量和决策变量的数量是恒定的, 所以仅将最大函数评估值设置为 $M * 10^4/2$ 。最后, 本节实验所用的环境如下: 软件版本为MATLAB2020B和PlatEMO4.0, 操作系统为Windows 10, CPU为R7-4800H。最后, 本节实验中所有对比算法和测试问题集采用基于MATLAB的进化多目标优化平台PlatEMO<sup>[184]</sup>的开源代码。

#### 4.2.2 测试函数实验结果与分析

本节将对五个算法在DTLZ和MaF的22个测试问题上进行对比实验, 在5种不同目标维度上进行检验。表6-9给出几个算法在测试问题上获得的HV和IGD结果。由于篇幅限制, 本节对这2种指标的非参数检验结果和各算法获得的最优指标结果的个数进行展示。

从表6和表8分别给出了HV、IGD的Wilcoxon和Friedman测试结果, 每个单元格中的3个数值依次表示这一列对应算法的结果明显优于/明显劣于/相似于最后一列的算法(即BiGE)。BiGE是一个仅针对超多目标优化问题设计的算法, 因此作为所有算法的对比对象。从非参数检验的结果

来看, ARMOEA和MOEA/D-URAW的性能明显优于BiGE, PICEA-g的性能与BiGE近似。表现较差的是SPEA/R, 性能表现差于BiGE, 尤其是在目标数量增加时, 这种性能上的差异被逐渐拉大。在8和10目标情况下, 甚至没有在任何的实例上的Friedman测试结果优于BiGE。这些非参数检验结果也与表7和表9的算法得到最优解个数相对应, 其中ARMOEA和MOEA/D-URAW获得最多的最优结果, PICEA-g和BiGE近似, SPEA/R则最少。

从测试问题的实验结果中能够得出如下结论: BiGE作为一种基于目标转化的超多目标优化算法, 将收敛性和多样性作为新的2目标问题进行处理。目标之间的转化提供了处理高维问题的有效思路, 但是需要考虑转化后的目标空间分布与原问题的差异。在这组测试问题实验中, 问题的Pareto前沿基本都是比较规则的形状。因此, MOEA/D-URAW这种基于参考点的算法能够更好的进行处理, 但MOEA/D-URAW在具有复杂Pareto前沿问题上的性能需要进一步验证。ARMOEA是一种基于指标的算法, 因此受到目标数量的影响较小。且因为Pareto前沿的规则性, ARMOEA在高维目标测试问题上的性能表现也很好。另外, 从获得的最优解个数来看, PICEA-g虽然略优于SPEA/R, 但两者的整体表现不如其他三个算法。这是由于基于Pareto的SPEA/R在高维目标中的性能缺少导致, PICEA-g则可能是因为协同进化在复杂的高维目标中不如低维空间更有效。此外, 原始结果中也展示出SPEA/R随目标数增加性能出现下降的问题, 其他4个算法则基本没有出现较大的波动。最后, 对5个算法得到的同一组解集, HV和IGD结果也给出不同的性能描述, 这也表现出2种指标在衡量收敛性和多样性上的侧重点不同, 后续进行性能评估时也需注意。

表9 各算法在不同目标下获得最大IGD指标的实例数量

M	SPEA/R	ARMOEA	MOEA/D-URAW	PICEA-g	BiGE
3	2	6	9	2	3
5	2	8	7	5	0
8	3	5	11	2	1
10	0	8	11	2	1
15	2	8	6	5	1

#### 4.2.3 实际问题实验结果与分析

本节将对焊接梁设计问题、减速机设计问题、轮系设计问题以及水资源规划问题这几个应用实例展开讨论,进一步对比5个代表性算法在实际应用上的性能表现。每个算法的最终解集用来进行对比展示,并通过HV指标进一步比较。由于水资源规划拥有6个目标因此采用平行坐标系进行展示。

由表10的HV结果可知, SPEA/R、ARMOEA、MOEA/D-URAW和PICEA-g的性能表现均优于BiGE。SPEA/R在这组实验中的表现优于测试问题,除了自身参考方向法的作用外,也与目标数量相对较少有关。从SPEA/R在水资源规划这个超多目标优化问题上得到最小的HV结果也能看出, SPEA/R依然会受到目标数量影响。另外, ARMOEA和MOEA/D-URAW在具有不规则甚至离散Pareto前沿的真实问题上表现依旧不错,也证明基于指标和基于随机自适应参考向量的算法在解决实际问题上的应用前景。最后PICEA-g在轮系设计问题以及水资源规划问题取得最优的HV结果,在减速机设计问题的性能表现也不错。但PICEA-g在焊接梁设计问题上表现最差,原因可能为PICEA-g在处理具有某些特殊性质的Pareto前沿的问题时表现不佳,下面将通过每个算法得到的非支配解在目标空间的收敛性和多样性情况展开分析。

针对真实优化问题的Pareto前沿,由于对约束进行目标转化,所以本节主要参考之前研究<sup>[172]</sup>中给出的Pareto前沿示例作为参考。图12-15分别给出了5个代表性算法在焊接梁设计问题、减速机设计问题、轮系设计问题以及水资源规划问题上得到的非支配解集。每个图中的(a)到(e)分别代表SPEA/R、ARMOEA、MOEA/D-URAW、PICEA-g和BiGE的解集在目标空间中的分布情况。

首先对焊接梁设计问题而言,各算法得到的非支配解集差异较大。其中, BiGE能够得到一组2部分均有分布的非支配解集,其他算法仅能得到其中一部分。从这一点来看, BiGE的性能反而最好,缺点为多样性较差,分布不均匀。此外, SPEA/R和PICEA-g仅得到其中一部分Pareto前

沿上的解,但PICEA-g得到的解集多样性明显好于SPEA/R。ARMOEA和MOEA/D-URAW则正相反,得到另外一部分Pareto前沿的解,且分布不均匀。

各算法在减速机设计问题上都得到收敛性较好的解集。其中, SPEA/R、MOEA/D-URAW和BiGE获得的解集能够得到3部分Pareto前沿上的解,但多样性表现差异较大。MOEA/D-URAW得到的解集在多样性方面的表现最好,每一部分都保持着良好的多样性。BiGE相对SPEA/R具有更好的多样性,但两者整体多样性表现都不好。这种多样性上的分布能力也导致SPEA/R和BiGE取得的HV指标结果相对较差,甚至低于仅在2部分Pareto前沿上找到解的ARMOEA和PICEA-g。作为对比, ARMOEA和PICEA-g的HV结果虽然优于SPEA/R和BiGE,但两者对解的寻优能力稍差,分别缺失1部分Pareto前沿上的解。ARMOEA虽然在其中1部分中找到一个边界解,但多样性很差。

轮系设计问题具有离散的Pareto前沿,可以从另一方面考验算法性能。在这5种代表性算法中, ARMOEA、MOEA/D-URAW和PICEA-g得到的非支配解集在收敛性和多样性上性能表现优秀,均能得到3部分Pareto前沿上的解。在这三者中, MOEA/D-URAW的解集多样性略差于ARMOEA和PICEA-g,但三者均在其中一部分Pareto前沿上找不到边界解。此外, SPEA/R和BiGE得到的解集在收敛性和多样性上的性能低于其他3个算法。SPEA/R的解集分布性较差且存在部分未在Pareto前沿上的解, BiGE则仅在其中一部分Pareto前沿上搜索到解,整体多样性较差。

由于水资源规划问题涉及高维目标空间,因此用平行坐标轴展示。这组实验中,5个代表性算法的收敛性差异不大,仅在多样性上存在一定差异。PICEA-g所得解集在多样性上表现最好,线条相对更为密集。ARMOEA、MOEA/D-URAW和BiGE这3个算法在多样性上表现很近似,而SPEA/R在多样性上明显低于其他几个算法,平行坐标轴的解集收敛和分布情况也与HV指标的结果一致。

表 10 各算法在实际问题上得到的HV指标

Problem	M	SPEA/R	ARMOEA	MOEA/D-URAW	PICEA-g	BiGE
WBD	3	9.9866e-1 (2.20e-4) +	9.9566e-1 (1.73e-3) -	9.9214e-1 (8.61e-3) =	9.9147e-1 (4.88e-3) -	9.9731e-1 (3.72e-4)
SRD	3	2.9517e-1 (3.64e-3) -	3.1220e-1 (3.38e-4) +	3.1270e-1 (1.53e-4) +	3.1079e-1 (7.92e-4) =	3.0855e-1 (5.22e-3)
GTD	3	4.7292e-1 (3.95e-3) +	4.8190e-1 (4.42e-4) +	4.8163e-1 (7.98e-4) +	4.8204e-1 (7.31e-4) +	3.9796e-1 (2.80e-2)
WRP	6	2.0446e-2 (3.93e-3) =	2.6979e-2 (1.36e-3) +	2.6541e-2 (4.65e-3) +	3.1813e-2 (1.26e-3) +	2.1421e-2 (3.70e-3)
+/-/=		2/1/1	3/1/0	3/0/1	2/1/1	

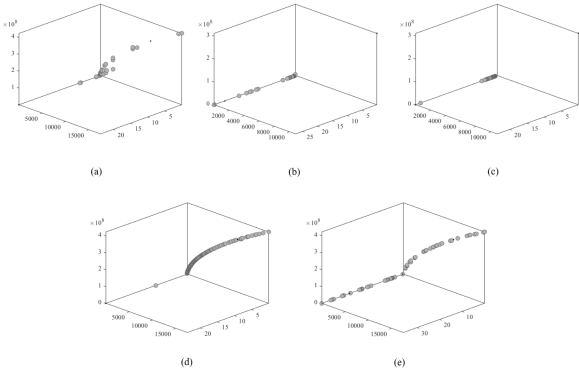


图 12 各算法在焊接梁设计问题上得到的非支配解集; (a) SPEA/R; (b) ARMOEA; (c) MOEA/D-URAW; (d) PICEA-g; (e) BiGE

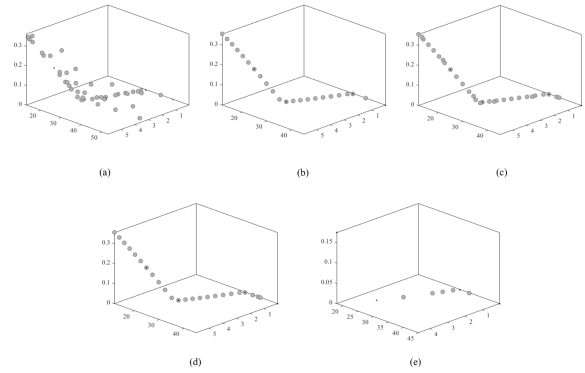


图 14 各算法在轮系设计问题上得到的非支配解集; (a) SPEA/R; (b) ARMOEA; (c) MOEA/D-URAW; (d) PICEA-g; (e) BiGE

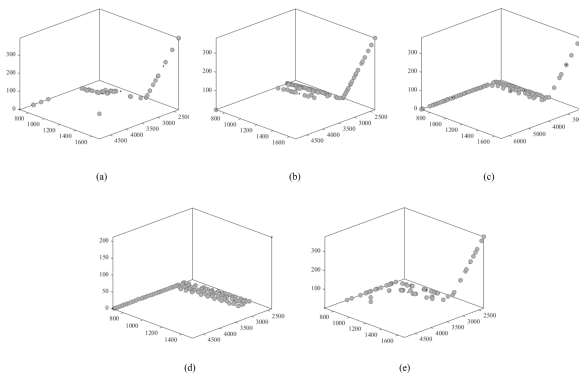


图 13 各算法在减速机设计问题上得到的非支配解集; (a) SPEA/R; (b) ARMOEA; (c) MOEA/D-URAW; (d) PICEA-g; (e) BiGE

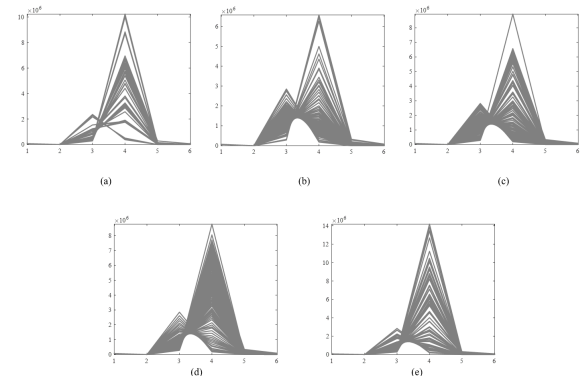


图 15 各算法在水资源规划问题上得到的非支配解集; (a) SPEA/R; (b) ARMOEA; (c) MOEA/D-URAW; (d) PICEA-g; (e) BiGE

综合整体实验结果看, 对所有问题, 没有一个算法能够在收敛性和多样性上性能完全优于其他算法, 但是对所选择的4个真实问题都可以选择出至少一个算法获得较好的非支配解集。从这一点看, 针对问题的特点选择一个合适的算法是一件有意义的事情, 但同时也较为难处理, 目前常规手段是将多种算法集成到一个求解器中, 然后根据专业人士的经验或偏好选择合适的解集或部分解集。

## 5 前沿问题与研究展望

### 5.1 前沿问题

当前超多目标优化领域还存在一些处理不够充

分的问题有待进一步研究, 现有工作中虽给出部分解决方案, 但仍需进一步探索。下面将对这些前沿问题和现有方案进行讨论。

(1) 多样性与收敛性平衡: 平衡最终解集的收敛性与多样性是多目标和超多目标优化中的核心问题。但因超多目标优化中包含更多冲突的目标使传统方法难以应用于高维目标空间搜索。现有算法中如膝点引导、网格支配、目标转化等策略已被广泛应用于处理超多目标优化中的收敛性与多样性平衡问题。但仍需进一步发展相关方法以更好的保证二者平衡, 尤其是既定策略如何适配到更多不同类型

的问题。

(2) 复杂Pareto前沿处理: 对超多目标优化问题尤其是一些实际问题而言, 不同问题之间的Pareto前沿形状差异可能很大。例如, 测试问题集DTLZ中的各个问题存在着局部、断裂、退化等形状的Pareto前沿。这种Pareto前沿形状的复杂性在真实问题中更为常见, 例如4.2节实验中使用的实际问题中还存在着离散的Pareto前沿。就此而言, 常规方法如基于分解的算法中使用的参考向量可能不能保持较好的性能。虽然现有的策略中如动态分解、参考向量自适应等策略被广泛的应用, 但对复杂Pareto前沿的统一处理仍需要进行大量工作。

(3) 约束处理: 多约束是处理真实问题时必须要额外考虑的重要特点。目标函数仿真是基础, 可行域的约束才是求解实际问题时的难点。现有的约束处理技术如罚函数、约束违反程度等还都存在着一定的局限性。有部分工作采用可行区域与不可行区域同时搜索保证解集多样性的策略。但想要真正把控好约束的处理仍有很长的路要走, 这也是使算法服务于真实问题的重要保障之一。

(4) 代理模型设计: 处理昂贵超多目标优化问题时, 代理模型的设计主要存在以下问题: ①如何有效设计超多目标优化问题中的机器学习任务; ②如何有效选择适合的机器学习模型进行训练; ③处理其他特点如大规模、区间变量、多模态等问题时如何更好的保证代理模型的有效性。近期工作中有采用多个分类模型处理大规模超多目标昂贵优化问题, 相比回归模型具有更好的泛化能力。但机器学习任务设计、模型选择等方面问题处理仍需要广泛研究。

## 5.2 研究展望

随研究不断展开, 纯粹以多目标或超多目标优化算法改进为目的的理论性研究已基本不是当今研究的主体, 更多复杂性的问题以及实际问题的求解逐渐成为研究主流。算法的研究本就是简单的问题出发逐渐复杂的过程, 算法的最终目的也是为了服务于真实问题求解。结合本文的统计数据及前沿问题, 当前主流的研究方向如下:

(1) 大规模超多目标优化: 大规模进化优化中主要涉及高维的决策变量, 与现实世界问题中多目标和高维相匹配, 现有实际应用研究中存在输入变量非常多的问题, 在这类问题的搜索中, 达到全局最优非常困难。因此, 在这个背景下的研究将对具有高维决策变量特点的问题求解具有现实意义。

(2) 代理模型辅助的昂贵超多目标优化: 对于昂贵问题, 目标值的求解速度和成本代价较大。常见如CFD仿真模拟求解需要消耗大量时间, 因此通过建立起代理模型进行有效的预测是一项有意义且有效的工作。现有代理辅助超多目标进化算法大致可分为基于回归和基于分类的两类算法。但对昂贵超多目标优化问题中的机器学习任务, 模型选择不宜做这种详细的划分, 多种模型的合理结合是一种有效手段。当前代理模型辅助的超多目标进化算法已经逐渐发展起来, 可以作为一个重点攻克方向。

(3) 超多目标实际应用: 正如前沿问题中所叙述, 算法最终要服务于实际应用才有意义。但这正是最为复杂的研究内容。从业务的角度讲, 实际应用的模型构建等可能需要不止一个领域的专业理论知识。从技术的角度讲, 问题的处理也不仅仅依赖于单独的学科, 需要多个学科交叉融合发展。因此, 两者有效结合才能够进行有效的仿真和高效的问题求解。另外, 实际问题的求解也绝不会如理论性研究中表现的简单。除对约束的处理, 还需要考虑解的选择问题。例如, 一般由专家在最优解集选取能够适应真实场景偏好的解。但这样需要消耗一定的人力或时间, 是否可以考虑根据实际场景的偏好构造出一个或一类通用的专家系统, 辅助算法完成运算后自主的智能化决策。再者, 当前利用决策偏好信息得到Pareto前沿上部分解集的方法是否有助于解的选择, 或者能否开发出一种偏好的启发方式去满足专家的切实需求, 都可做出进一步研究。最后, 加强问题导向有助于处理实际应用, 向群智能进化的方向发展<sup>[185]</sup>。

(4) 高维目标空间可解释性: 正如4.2.3节中对水资源规划问题的实验, 采用平行坐标轴对高维目标空间中非支配解集的观测不直观且可能带来判断的误差, 尤其是对解集多样性的分析限制较大。因此, 对高维目标空间的可解释性研究仍是一个具有重大意义的方向。当前有工作展开对高维目标空间的可视化研究, 如3D-RadVis等<sup>[120,121]</sup>。但未来对高维目标空间的可解释性工作仍需进一步展开, 以更好的挖掘高维目标空间的特征指导算法有效改进。

## 参考文献(References)

- [1] Ishibuchi H, Tsukamoto N, Nojima Y. Evolutionary many-objective optimization: A short review [C]. 2008 IEEE congress on evolutionary computation, 2008: 2419-2426.
- [2] Li M, Yang S, Liu X et al. A comparative study on evolutionary algorithms for many-objective optimization

- [C]. International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 2013: 261-275.
- [3] 田野, 张兴义. 超多目标进化优化研究现状及发展趋势研究 [J]. 广州大学学报(自然科学版), 2019, 18(1): 10-19.  
(Tian Y, Zhang X Y. On the research status and development trends of evolutionary many-objective optimization [J]. Journal of Guangzhou University (Natural Science Edition), 2019, 18(1): 10-19.)
- [4] 刘建昌, 李飞, 王洪海等. 进化高维多目标优化算法研究综述 [J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 879-887.  
(Liu J C, Li F, Wang H H et al. Survey on evolutionary many-objective optimization algorithms [J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 879-887.)
- [5] 岳彩通, 梁静, 瞿博阳等. 多模态多目标优化综述 [J]. 控制与决策, 2021, 36(11): 2577-2588.  
(Yue C T, Liang J, Qu B Y et al. A survey on multimodal multiobjective optimization [J]. Control and Decision, 2021, 36(11): 2577-2588.)
- [6] 刘若辰, 李建霞, 刘静等. 动态多目标优化研究综述 [J]. 计算机学报, 2020, 43(7): 1246-1278.  
(Liu R C, Li J X, Liu J et al. A survey on dynamic multi-objective optimization [J]. Chinese Journal of Computers, 2020, 43(7): 1246-1278.)
- [7] Afshari H, Hare W, Tesfamariam S. Constrained multi-objective optimization algorithms: review and comparison with application in reinforced concrete structures [J]. Applied Soft Computing, 2019, 83: 105631.
- [8] 陈宗淦, 詹志辉. 面向多峰优化问题的双层协同差分进化算法 [J]. 计算机学报, 2021, 44(9): 1806-1823.  
(Chen Z G, Zhan Z H. Two-layer collaborative differential evolution algorithm for multimodal optimization problems [J]. Chinese Journal of Computers, 2021, 44(9): 1806-1823.)
- [9] 肖人彬, 冯振辉, 王甲海. 群体智能的概念辨析与研究进展及应用分析 [J]. 南昌工程学院学报, 2022, 41(1): 1-21.  
(Xiao R B, Feng Z H, Wang J H. Collective intelligence: conception, research progress and application analyses [J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2022, 41(1): 1-21.)
- [10] Deb K, Thiele L, Laumanns M et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization, in Evolutionary Multiobjective Optimization: Springer, 2005, pp. 105-145.
- [11] Huband S, Barone L, While L et al. A scalable multi-objective test problem toolkit [C]. International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 2005: 280-295.
- [12] Huband S, Hingston P, Barone L et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(5): 477-506.
- [13] Deb K, Pratap A, Agarwal S et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [14] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm [J]. TIK-report, 2001, 103:
- [15] Deb K. Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: an introduction, in Multi-objective evolutionary optimisation for product design and manufacturing: Springer, 2011, pp. 3-34.
- [16] Wang H, Jiao L, Yao X. Two\_Arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 19(4): 524-541.
- [17] Yang S, Li M, Liu X et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [18] Cheng R, Jin Y, Olhofer M. Test problems for large-scale multiobjective and many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 47(12): 4108-4121.
- [19] Tian Y, Si L, Zhang X et al. Evolutionary large-scale multi-objective optimization: A survey [J]. ACM Computing Surveys (CSUR), 2021, 54(8): 1-34.
- [20] Miguel Antonio L, Coello Coello C A. Decomposition-based approach for solving large scale multi-objective problems [C]. International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, 2016: 525-534.
- [21] Antonio L M, Coello C A C, Brambila S G et al. Operational decomposition for large scale multi-objective optimization problems [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2019: 225-226.
- [22] Song A, Yang Q, Chen W-N et al. A random-based dynamic grouping strategy for large scale multi-objective optimization [C]. 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2016: 468-475.
- [23] Sander F, Zille H, Mostaghim S. Transfer strategies from single-to multi-objective grouping mechanisms [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, 2018: 729-736.
- [24] Li M, Wei J. A cooperative co-evolutionary algorithm for large-scale multi-objective optimization problems [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2018: 1716-1721.
- [25] Ma X, Liu F, Qi Y et al. A multiobjective evolutionary algorithm based on decision variable analyses for multiobjective optimization problems with large-scale variables [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(2): 275-298.
- [26] Zhang X, Tian Y, Cheng R et al. A decision variable clustering-based evolutionary algorithm for large-scale many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on

- Evolutionary Computation, 2016, 22(1): 97-112.
- [27] Du W, Tong L, Tang Y. A framework for high-dimensional robust evolutionary multi-objective optimization [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2018: 1791-1796.
- [28] Du W, Zhong W, Tang Y et al. High-dimensional robust multi-objective optimization for order scheduling: A decision variable classification approach [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2018, 15(1): 293-304.
- [29] Zille H, Ishibuchi H, Mostaghim S et al. Weighted optimization framework for large-scale multi-objective optimization [C]. Proceedings of the 2016 on Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2016: 83-84.
- [30] He C, Li L, Tian Y et al. Accelerating large-scale multiobjective optimization via problem reformulation [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(6): 949-961.
- [31] Zille H, Mostaghim S. Linear search mechanism for multi-and many-objective optimisation [C]. International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 2019: 399-410.
- [32] Qian H, Yu Y. Solving high-dimensional multi-objective optimization problems with low effective dimensions [C]. Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2017, 31 (1).
- [33] Liu R, Ren R, Liu J et al. A clustering and dimensionality reduction based evolutionary algorithm for large-scale multi-objective problems [J]. Applied Soft Computing, 2020, 89: 106120.
- [34] Tian Y, Lu C, Zhang X et al. Solving large-scale multiobjective optimization problems with sparse optimal solutions via unsupervised neural networks [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 51(6): 3115-3128.
- [35] Yi J-H, Xing L-N, Wang G-G et al. Behavior of crossover operators in NSGA-III for large-scale optimization problems [J]. Information Sciences, 2020, 509: 470-487.
- [36] Zhang Y, Wang G-G, Li K et al. Enhancing MOEA/D with information feedback models for large-scale many-objective optimization [J]. Information Sciences, 2020, 522: 1-16.
- [37] Gu Z-M, Wang G-G. Improving NSGA-III algorithms with information feedback models for large-scale many-objective optimization [J]. Future Generation Computer Systems, 2020, 107: 49-69.
- [38] Cheng R, Jin Y, Narukawa K et al. A multiobjective evolutionary algorithm using Gaussian process-based inverse modeling [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 19(6): 838-856.
- [39] Chen H, Cheng R, Wen J et al. Solving large-scale many-objective optimization problems by covariance matrix adaptation evolution strategy with scalable small subpopulations [J]. Information Sciences, 2020, 509: 457-469.
- [40] He C, Huang S, Cheng R et al. Evolutionary multiobjective optimization driven by generative adversarial networks (GANs) [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 51(6): 3129-3142.
- [41] Saxena D K, Ray T, Deb K et al. Constrained many-objective optimization: A way forward [C]. 2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2009: 545-552.
- [42] 范衡, 朱贵杰, 李文姬等. 进化计算在复杂机电系统设计自动化中的应用综述 [J]. 自动化学报, 2021, 47(7): 1495-1515.  
(Fan Z, Zhu G J, Li W J et al. Applications of evolutionary computation in the design automation of complex mechatronic system: a survey [J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(7): 1495-1515.)
- [43] Zhu Q, Zhang Q, Lin Q. A constrained multiobjective evolutionary algorithm with detect-and-escape strategy [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2020, 24(5): 938-947.
- [44] 李文姬, 约束多目标优化理论及其在超高层建筑风振控制中的应用研究 [D]. 汕头大学, 2020.  
(Li W J. Constrained multi-objective optimization and its applications in wind-induced vibration mitigation of super high-rise buildings [D]. Shantou University, 2020.)
- [45] Gong D, Sun J, Miao Z. A set-based genetic algorithm for interval many-objective optimization problems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 22(1): 47-60.
- [46] Ge F, Li K, Han Y. Solving interval many-objective optimization problems by combination of NSGA-III and a local fruit fly optimization algorithm [J]. Applied Soft Computing, 2022, 114: 108096.
- [47] Limbourg P, Aponte D E S. An optimization algorithm for imprecise multi-objective problem functions [C]. 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2005, 1: 459-466.
- [48] Maity K, Sengupta R, Saha S. MM-NAEMO: Multimodal neighborhood-sensitive archived evolutionary many-objective optimization algorithm [C]. 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2019: 286-294.
- [49] Tanabe R, Ishibuchi H. A niching indicator-based multi-modal many-objective optimizer [J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2019, 49: 134-146.
- [50] Chugh T, Sindhya K, Miettinen K et al. Surrogate-assisted evolutionary multiobjective shape optimization of an air intake ventilation system [C]. 2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2017: 1541-1548.
- [51] Liu B, Zhang Q, Gielen G G. A Gaussian process surrogate model assisted evolutionary algorithm for medium scale expensive optimization problems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 18(2):

- 180-192.
- [52] Pan L, He C, Tian Y et al. A classification-based surrogate-assisted evolutionary algorithm for expensive many-objective optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(1): 74-88.
- [53] Chugh T, Sindhya K, Miettinen K et al. On constraint handling in surrogate-assisted evolutionary many-objective optimization [C]. *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, 2016: 214-224.
- [54] Zhou Z, Ong Y S, Nguyen M H et al. A study on polynomial regression and Gaussian process global surrogate model in hierarchical surrogate-assisted evolutionary algorithm [C]. *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2005, 3: 2832-2839.
- [55] Chugh T, Jin Y, Miettinen K et al. A surrogate-assisted reference vector guided evolutionary algorithm for computationally expensive many-objective optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 22(1): 129-142.
- [56] Buche D, Schraudolph N N, Koumoutsakos P. Accelerating evolutionary algorithms with Gaussian process fitness function models [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 2005, 35(2): 183-194.
- [57] Jin Y, Olhofer M, Sendhoff B. A framework for evolutionary optimization with approximate fitness functions [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(5): 481-494.
- [58] Willmes L, Back T, Jin Y et al. Comparing neural networks and kriging for fitness approximation in evolutionary optimization [C]. *2003 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 2003, 1: 663-670.
- [59] Jin Y, Sendhoff B. Reducing fitness evaluations using clustering techniques and neural network ensembles [C]. *Genetic and Evolutionary Computation Conference*, 2004: 688-699.
- [60] Zapotecas Martínez S, Coello Coello C A. MOEA/D assisted by RBF networks for expensive multi-objective optimization problems [C]. *Proceedings of the 15th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, 2013: 1405-1412.
- [61] Regis R G. Evolutionary programming for high-dimensional constrained expensive black-box optimization using radial basis functions [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(3): 326-347.
- [62] Sun C, Jin Y, Zeng J et al. A two-layer surrogate-assisted particle swarm optimization algorithm [J]. *Soft Computing*, 2015, 19(6): 1461-1475.
- [63] Sun C, Jin Y, Cheng R et al. Surrogate-assisted cooperative swarm optimization of high-dimensional expensive problems [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(4): 644-660.
- [64] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: solving problems with box constraints [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(4): 577-601.
- [65] Jain H, Deb K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, part II: Handling constraints and extending to an adaptive approach [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(4): 602-622.
- [66] Laumanns M, Thiele L, Deb K et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization [J]. *Evolutionary Computation*, 2002, 10(3): 263-282.
- [67] Hadka D, Reed P. Borg: An auto-adaptive many-objective evolutionary computing framework [J]. *Evolutionary Computation*, 2013, 21(2): 231-259.
- [68] Wang G, Jiang H. Fuzzy-dominance and its application in evolutionary many objective optimization [C]. *2007 International Conference on Computational Intelligence and Security Workshops (CISW 2007)*, 2007: 195-198.
- [69] Das S S, Islam M M, Arafat N A. Evolutionary algorithm using adaptive fuzzy dominance and reference point for many-objective optimization [J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 44: 1092-1107.
- [70] Dai C, Wang Y, Ye M. A new evolutionary algorithm based on contraction method for many-objective optimization problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 245: 191-205.
- [71] Zhang X, Tian Y, Jin Y. Approximate non-dominated sorting for evolutionary many-objective optimization [J]. *Information Sciences*, 2016, 369: 14-33.
- [72] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization [J]. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(1): 45-76.
- [73] While L, Hingston P, Barone L et al. A faster algorithm for calculating hypervolume [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(1): 29-38.
- [74] Russo L M, Francisco A P. Quick hypervolume [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(4): 481-502.
- [75] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search [C]. *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, 2004: 832-842.
- [76] Yuan J, Liu H-L, Gu F. A cost value based evolutionary many-objective optimization algorithm with neighbor selection strategy [C]. *2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 2018: 1-8.
- [77] Díaz-Manríquez A, Toscano-Pulido G, Coello C A C et al. A ranking method based on the R2 indicator for many-objective optimization [C]. *2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2013: 1523-1530.
- [78] Gómez R H, Coello C A C. MOMBI: A new metaheuristic for many-objective optimization based

- on the R2 indicator [C]. 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2013: 2488-2495.
- [79] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731.
- [80] He X, Zhou Y, Chen Z et al. Evolutionary many-objective optimization based on dynamical decomposition [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 23(3): 361-375.
- [81] Farias L R, Araújo A F. Many-objective evolutionary algorithm based on decomposition with random and adaptive weights [C]. 2019 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC), 2019: 3746-3751.
- [82] Ishibuchi H, Doi K, Nojima Y. Reference point specification in MOEA/D for multi-objective and many-objective problems [C]. 2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2016: 004015-004020.
- [83] Liu H-L, Gu F, Zhang Q. Decomposition of a multiobjective optimization problem into a number of simple multiobjective subproblems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 18(3): 450-455.
- [84] Li H, Zhang Q. Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2008, 13(2): 284-302.
- [85] Li K, Deb K, Zhang Q et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 19(5): 694-716.
- [86] Tanabe R, Ishibuchi H. An analysis of control parameters of MOEA/D under two different optimization scenarios [J]. Applied Soft Computing, 2018, 70: 22-40.
- [87] Wang T-C, Ting C-K. Fitness inheritance assisted MOEA/D-CMAES for complex multi-objective optimization problems [C]. 2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2018: 1-8.
- [88] Asafuddoula M, Ray T, Sarker R. A decomposition-based evolutionary algorithm for many objective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 19(3): 445-460.
- [89] Das I, Dennis J E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems [J]. SIAM Journal on Optimization, 1998, 8(3): 631-657.
- [90] Cheng R, Jin Y, Olhofer M et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.
- [91] Liu S, Lin Q, Wong K-C et al. A self-guided reference vector strategy for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 52(5): 1164-1178.
- [92] Pescador-Rojas M, Coello C A C. Studying the effect of techniques to generate reference vectors in many-objective optimization [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2018: 193-194.
- [93] Deb K, Bandaru S, Seada H. Generating uniformly distributed points on a unit simplex for evolutionary many-objective optimization [C]. International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 2019: 179-190.
- [94] Garza-Fabre M, Toscano-Pulido G, Coello C A C et al. Effective ranking+ speciation= many-objective optimization [C]. 2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC), 2011: 2115-2122.
- [95] Jiao L, Wang H, Shang R et al. A co-evolutionary multi-objective optimization algorithm based on direction vectors [J]. Information Sciences, 2013, 228: 90-112.
- [96] Li M, Yang S, Liu X. Pareto or non-Pareto: Bi-criterion evolution in multiobjective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(5): 645-665.
- [97] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired coevolutionary algorithms for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2012, 17(4): 474-494.
- [98] 巩敦卫, 王更星, 孙晓燕. 高维多目标优化问题融入决策者偏好的集合进化优化方法 [J]. 电子学报, 2014, 42(5): 933-939.  
(Gong D W, Wang G X, Sun X Y. Set-based evolutionary optimization algorithms integrating decision-maker's preferences for many-objective optimization problems [J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(5): 933-939.)
- [99] Yu G, Jin Y, Olhofer M. References or preferences—rethinking many-objective evolutionary optimization [C]. 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2019: 2410-2417.
- [100] Cheng R, Rodemann T, Fischer M et al. Evolutionary many-objective optimization of hybrid electric vehicle control: From general optimization to preference articulation [J]. IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence, 2017, 1(2): 97-111.
- [101] Zhang B, Shafi K, Abbass H A. Hybrid knowledge-based evolutionary many-objective optimization [C]. 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2016: 1007-1014.
- [102] Ma L, Li N, Guo Y et al. Learning to optimize: reference vector reinforcement learning adaption to constrained many-objective optimization of industrial copper burdening system [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(12): 12698-12711.
- [103] Sagawa M, Aguirre H, Daolio F et al. A Machine-Learning Approach to Select Important Variables for Recombination on Many-objective Evolutionary Optimization [J]. International Journal of



- Smart Computing and Artificial Intelligence, 2018, 2(1): 59-78.
- [104] Mittal S, Saxena D K, Deb K et al. Enhanced Innovized Progress Operator for Evolutionary Multi-and Many-objective Optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2021, 26(5): 961-975.
- [105] 刘海林, 肖俊荣. 基于分解和超平面拟合的进化超多目标优化降维算法 [J]. 电子与信息学报, 2022, 44(9): 3289-3298.  
(Liu H L, Xiao J R. Objective reduction algorithm based on decomposition and hyperplane approximation for evolutionary many-objective optimization [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2022, 44(9): 3289-3298.)
- [106] Li Y, Liu H-L, Goodman E D. Hyperplane-approximation-based method for many-objective optimization problems with redundant objectives [J]. Evolutionary Computation, 2019, 27(2): 313-344.
- [107] Cheung Y-m, Gu F, Liu H-L. Objective extraction for many-objective optimization problems: Algorithm and test problems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 755-772.
- [108] Wang J, Chen H. A weight vector bi-objective evolutionary algorithm with bi-criterion evolution for many-objective optimization [C]. 2022 IEEE 4th International Conference on Power, Intelligent Computing and Systems (ICPICS), 2022: 273-279.
- [109] Liu S-C, Zhan Z-H, Tan K C et al. A multiobjective framework for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021. doi: 10.1109/TCYB.2021.3082200
- [110] Jin Y, Wang H, Chugh T et al. Data-driven evolutionary optimization: An overview and case studies [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 23(3): 442-458.
- [111] Wu X, Zhu X, Wu G-Q et al. Data mining with big data [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2013, 26(1): 97-107.
- [112] Guo D, Chai T, Ding J et al. Small data driven evolutionary multi-objective optimization of fused magnesium furnaces [C]. 2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI), 2016: 1-8.
- [113] Jin Y. Surrogate-assisted evolutionary computation: Recent advances and future challenges [J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(2): 61-70.
- [114] Hüsken M, Jin Y, Sendhoff B. Structure optimization of neural networks for evolutionary design optimization [J]. Soft Computing, 2005, 9(1): 21-28.
- [115] Jiao R, Zeng S, Li C et al. Handling constrained many-objective optimization problems via problem transformation [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020:
- [116] Hou Z, He C, Cheng R. Reformulating preferences into constraints for evolutionary multi-and many-objective optimization [J]. Information Sciences, 2020, 541: 1-15.
- [117] Sun J, Miao Z, Gong D et al. Interval multiobjective optimization with memetic algorithms [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 50(8): 3444-3457.
- [118] Gong D, Xu B, Zhang Y et al. A similarity-based cooperative co-evolutionary algorithm for dynamic interval multiobjective optimization problems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 24(1): 142-156.
- [119] Duro J A, Saxena D K, Deb K et al. Machine learning based decision support for many-objective optimization problems [J]. Neurocomputing, 2014, 146: 30-47.
- [120] Ibrahim A, Rahnamayan S, Martin M V et al. 3D-RadVis: visualization of Pareto front in many-objective optimization [C]. 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2016: 736-745.
- [121] He Z, Yen G G. An improved visualization approach in many-objective optimization [C]. 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2016: 1618-1625.
- [122] Gong D, Sun J, Ji X. Evolutionary algorithms with preference polyhedron for interval multi-objective optimization problems [J]. Information Sciences, 2013, 233: 141-161.
- [123] Elarbi M, Bechikh S, Said L B. On the importance of isolated solutions in constrained decomposition-based many-objective optimization [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, 2017: 561-568.
- [124] Li X, Zeng S, Li C et al. Many-objective optimization with dynamic constraint handling for constrained optimization problems [J]. Soft Computing, 2017, 21(24): 7435-7445.
- [125] Miyakawa M, Sato H, Sato Y. Utilization of infeasible solutions in MOEA/D for solving constrained many-objective optimization problems [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2017: 35-36.
- [126] Zhou Y, Zhu M, Wang J et al. Tri-goal evolution framework for constrained many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 50(8): 3086-3099.
- [127] Woldesenbet Y G, Yen G G, Tessema B G. Constraint handling in multiobjective evolutionary optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2009, 13(3): 514-525.
- [128] Yang Y, Liu J, Tan S et al. A multi-objective differential evolutionary algorithm for constrained multi-objective optimization problems with low feasible ratio [J]. Applied Soft Computing, 2019, 80: 42-56.
- [129] Fan Z, Fang Y, Li W et al. MOEA/D with angle-based constrained dominance principle for constrained multi-objective optimization problems [J]. Applied Soft Computing, 2019, 74: 621-633.
- [130] Schaffer J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms [C]. Proceedings of

- the First International Conference of Genetic Algorithms and Their Application, 1985: 93-100.
- [131] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results [J]. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 173-195.
- [132] Zhang Q, Zhou A, Zhao S et al. Multiobjective optimization test instances for the CEC 2009 special session and competition [J]. University of Essex, Colchester, UK and Nanyang Technological University, Singapore, special session on performance assessment of multi-objective optimization algorithms, technical report, 2008, 264: 1-30.
- [133] Cheng R, Li M, Tian Y et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization [J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3(1): 67-81.
- [134] Jiang S, Ong Y-S, Zhang J et al. Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(12): 2391-2404.
- [135] Wu J, Azarm S. Metrics for quality assessment of a multiobjective design optimization solution set [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2001, 123(1): 18-25.
- [136] Van Veldhuizen D A, Lamont G B. Multiobjective evolutionary algorithm test suites [C]. *Proceedings of the 1999 ACM Symposium on Applied Computing*, 1999: 351-357.
- [137] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review [J]. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 2003, 7(2): 117-132.
- [138] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study [C]. *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, 1998: 292-301.
- [139] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271.
- [140] Champasak P, Panagant N, Pholdee N et al. Self-adaptive many-objective meta-heuristic based on decomposition for many-objective conceptual design of a fixed wing unmanned aerial vehicle [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 100: 105783.
- [141] 柴依扬, 张乐乐, 窦伟元等. 基于并行NSGA-III算法的高速列车车体侧墙结构高维多目标优化 [J/OL]. *机械工程学报*, 2022: 1-13.  
(Chai Y Y, Zhang L L, Dou W Y et al. Parallel NSGA-III based many-objective optimization for side wall section size of high-speed train car-body [J/OL]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022: 1-13.)
- [142] 姚曙光, 田红旗, 许平. 重载敞车车体结构轻量化设计 [J]. *交通运输工程学报*, 2011, 11(1): 31-35+57.  
(Yao S G, Tian H Q, Xu P. Lightening design of carbody structure for heavy haul gondola [J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2011, 11(1): 31-35+57.)
- [143] Zhang H, Peng Y, Hou L et al. A hybrid multi-objective optimization approach for energy-absorbing structures in train collisions [J]. *Information Sciences*, 2019, 481: 491-506.
- [144] Xie S-c, Zhou H. Multi-objective optimisation of a vehicle energy absorption structure based on surrogate model [J]. *Journal of Central South University*, 2014, 21(6): 2539-2546.
- [145] Peng Y, Wang X, Xiong X et al. Crashing analysis and multi-objective optimisation of duplex energy-absorbing structure for subway vehicle [J]. *International Journal of Crashworthiness*, 2016, 21(4): 338-352.
- [146] Fleck M, Troya J, Kessentini M et al. Model transformation modularization as a many-objective optimization problem [J]. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 2017, 43(11): 1009-1032.
- [147] Qasim S Z, Ismail M A. Research problems in search-based software engineering for many-objective optimization [C]. *2017 International Conference on Innovations in Electrical Engineering and Computational Technologies (ICIEECT)*, 2017: 1-6.
- [148] Xiang Y, Yang X, Zhou Y et al. Going deeper with optimal software products selection using many-objective optimization and satisfiability solvers [J]. *Empirical Software Engineering*, 2020, 25(1): 591-626.
- [149] Wei Z, Xiaoxue W, Xibing Y et al. Test suite minimization with mutation testing-based many-objective evolutionary optimization [C]. *2017 International Conference on Software Analysis, Testing and Evolution (SATE)*, 2017: 30-36.
- [150] Panichella A, Kifetew F M, Tonella P. Reformulating branch coverage as a many-objective optimization problem [C]. *2015 IEEE 8th International Conference on Software Testing, Verification and Validation (ICST)*, 2015: 1-10.
- [151] Haq F U, Shin D, Briand L. Efficient online testing for DNN-enabled systems using surrogate-assisted and many-objective optimization [C]. *Proceedings of the 44th International Conference on Software Engineering*, 2022: 811-822.
- [152] Xiang Y, Zhou Y, Zheng Z et al. Configuring software product lines by combining many-objective optimization and SAT solvers [J]. *ACM Transactions on Software Engineering and Methodology (TOSEM)*, 2018, 26(4): 1-46.
- [153] Prajapati A. Two-archive fuzzy-pareto-dominance swarm optimization for many-objective software architecture reconstruction [J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2021, 46(4): 3503-3518.
- [154] Cai X, Zhang J, Ning Z et al. A many-objective multistage optimization-based fuzzy decision-making model for coal production prediction [J]. *IEEE*

- Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 29(12): 3665-3675.
- [155] Gong X, De Pessemier T, Martens L et al. Energy-and labor-aware flexible job shop scheduling under dynamic electricity pricing: A many-objective optimization investigation [J]. Journal of Cleaner Production, 2019, 209: 1078-1094.
- [156] Wang J, Sun X, Gong D et al. Many-Objective Evolutionary Optimization Based Economic Dispatch of Integrated Energy System with Multi-microgrid and CHP [C]. International Conference on Bio-Inspired Computing: Theories and Applications, 2019: 147-163.
- [157] Li Y, Hao G, Liu Y et al. Many-objective distribution network reconfiguration via deep reinforcement learning assisted optimization algorithm [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2021, 37(3): 2230-2244.
- [158] Rodemann T, Narukawa K, Fischer M et al. Many-objective optimization of a hybrid car controller [C]. European Conference on the Applications of Evolutionary Computation, 2015: 593-603.
- [159] Ogino Y, Iida R, Rodemann T. Using desirability functions for many-objective optimization of a hybrid car controller [C]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2017: 297-298.
- [160] Chai H, Zhao X, Yu Q et al. An optimization approach for improving comprehensive performance of PHET based on evolutionary many-objective optimization [J]. Advanced Theory and Simulations, 2022, 5(4): 2100576.
- [161] Liu Q, Jin Y, Heiderich M et al. An adaptive reference vector-guided evolutionary algorithm using growing neural gas for many-objective optimization of irregular problems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 52(5): 2698-2711.
- [162] Zhang Z, Cao Y, Cui Z et al. A many-objective optimization based intelligent intrusion detection algorithm for enhancing security of vehicular networks in 6G [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2021, 70(6): 5234-5243.
- [163] Pan X, Wang L, Qiu Q et al. Many-objective optimization for large-scale EVs charging and discharging schedules considering travel convenience [J]. Applied Intelligence, 2022, 52(3): 2599-2620.
- [164] Ray T, Asafuddoula M, Singh H K et al. An approach to identify six sigma robust solutions of multi/many-objective engineering design optimization problems [J]. Journal of Mechanical Design, 2015, 137(5): 051404.
- [165] Yuan Y, Ong Y-S, Gupta A et al. Objective reduction in many-objective optimization: evolutionary multiobjective approaches and comprehensive analysis [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 22(2): 189-210.
- [166] Bitsi K, Wallmark O, Bosga S. Many-objective optimization of ipm and induction motors for automotive application [C]. 2019 21st European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'19 ECCE Europe), 2019: 1-10.
- [167] Marques J, Cunha M, Savić D. Many-objective optimization model for the flexible design of water distribution networks [J]. Journal of Environmental Management, 2018, 226: 308-319.
- [168] Son H, Kim C. Evolutionary many-objective optimization for retrofit planning in public buildings: A comparative study [J]. Journal of Cleaner Production, 2018, 190: 403-410.
- [169] Bandyopadhyay S, Mukherjee A. An algorithm for many-objective optimization with reduced objective computations: A study in differential evolution [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 19(3): 400-413.
- [170] Rodemann T. A many-objective configuration optimization for building energy management [C]. 2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2018: 1-8.
- [171] 雷德明, 苏斌. 基于多班教学优化的多目标分布式混合流水车间调度 [J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 303-313.  
(Lei D M, Su B. Multi-class teaching-learning-based optimization for multi-objective distributed hybrid flow shop scheduling [J]. Control and Decision, 2021, 36(2): 303-313.)
- [172] Tanabe R, Ishibuchi H. An easy-to-use real-world multi-objective optimization problem suite [J]. Applied Soft Computing, 2020, 89: 106078.
- [173] Cao B, Zhang Y, Zhao J et al. Recommendation based on large-scale many-objective optimization for the intelligent internet of things system [J]. IEEE Internet of Things Journal, 2021:
- [174] Prajapati A. A particle swarm optimization approach for large-scale many-objective software architecture recovery [J]. Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences, 2021:
- [175] Ochoa-Estopier L M, Enríquez-Gutierrez V M, Chen L et al. Industrial application of surrogate models to optimize crude oil distillation units [J]. Chemical Engineering Transactions, 2018, 69: 289-294.
- [176] Guo D, Wang X, Gao K et al. Evolutionary optimization of high-dimensional multiobjective and many-objective expensive problems assisted by a dropout neural network [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 52(4): 2084-2097.
- [177] Han D, Du W, Wang X et al. A surrogate-assisted evolutionary algorithm for expensive many-objective optimization in the refining process [J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2022, 69: 100988.
- [178] Wang W, Akhtar T, Shoemaker C A. Integrating  $\varepsilon$ -dominance and RBF surrogate optimization for solving computationally expensive many-objective optimization problems [J]. Journal of Global Optimization, 2022,

- 82(4): 965-992.
- [179] Tolson B A, Shoemaker C A. Cannonsville reservoir watershed SWAT2000 model development, calibration and validation [J]. *Journal of Hydrology*, 2007, 337(1-2): 68-86.
- [180] Hein K. Emission-aware and data-driven many-objective voyage and energy management optimization of solar-integrated all-electric ship [J]. *Electric Power Systems Research*, 2022, 213: 108718.
- [181] Jiang S, Yang S. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 329-346.
- [182] Tian Y, Cheng R, Zhang X et al. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(4): 609-622.
- [183] Li M, Yang S, Liu X. Bi-goal evolution for many-objective optimization problems [J]. *Artificial Intelligence*, 2015, 228: 45-65.
- [184] Tian Y, Cheng R, Zhang X et al. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum] [J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87.
- [185] 肖人彬, 陈峙臻. 从群智能优化到群智能进化 [J]. *南昌工程学院学报*, 2022, 42(1): 1-10.  
(Xiao R B, Chen Z Z. From swarm intelligence optimization to swarm intelligence evolution[J]. *Journal of Nanchang Institute of Technology*, 2022, 42(1): 1-10.)

#### 作者简介

肖人彬(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事群体智能、涌现计算、大规模个性化定制等研究, E-mail: rbxiao@hust.edu.cn;

李贵(1996—), 男, 博士生, 从事超多目标优化、机器学习等研究, E-mail: liguiatqingdao@gmail.com;

陈峙臻(1986—), 男, 高级讲师, 博士, 从事机器学习算法、金融风险管理等研究, E-mail: z.chen@gre.ac.uk.